1 Bozza di soluzione appello 2010-06-07

1.1 tipi

Il tipo di x è nat perché x viene usato nella sottoespressione $x - 1$. Il tipo di f è $nat \to nat$ perché f viene usato nella sottoespressione $x * f(x-1)$ e il $*$ è solo fra due nat. Il tipo di e è $nat \to nat$ perché deve essere lo stesso di f.

1.2 catena

Il cpo D è $(V_{nat \to nat})_\perp = ((\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp)_{CON})_\perp$ dove $(-)_{CON}$ indica l'insieme delle funzioni continue. La sequenza monotona crescente inizia con $f_0 = \perp$ e poi prosegue con le seguenti funzioni

f_4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\lfloor 6 \rfloor$	$\lfloor 24 \rfloor$	$\lfloor 120 \rfloor$	$\lfloor 720 \rfloor$	$\perp$	$\perp$
f_3	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\lfloor 6 \rfloor$	$\lfloor 24 \rfloor$	$\lfloor 120 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
f_2	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\lfloor 6 \rfloor$	$\lfloor 24 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
f_1	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\lfloor 6 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$argomento:$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 3 \rfloor$	$\lfloor 4 \rfloor$	$\lfloor 5 \rfloor$	$\lfloor 6 \rfloor$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\lfloor 8 \rfloor$

1.3 punto fisso

Il punto fisso è relativo all'equazione

$$f \sim \lambda x. if\, x = 3\, then\, 6\, else\, x * f(x-1)$$

Il minimo punto fisso è la funzione fattoriale troncata come segue: $f(\lfloor x \rfloor) = \perp$ per $x < 3$, e $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor x! \rfloor$ altrimenti.

Ricordiamo che $0 - 1 = 0$ nel nostro calcolo, poiché abbiamo solo i naturali. Un altro punto fisso quindi può essere $g(\lfloor x \rfloor) = \lfloor 0 \rfloor$ per $x < 3$, e $g(\lfloor x \rfloor) = \lfloor x! \rfloor$ altrimenti. g è un punto fisso in quanto per $x < 3$ si ha (omettendo i lift $\lfloor - \rfloor$ per semplicità) $g(x) = x * g(x-1)$.

2 Bozza di soluzione appello 2010-07-19

2.1 catena

La sequenza monotona crescente inizia con $f_0 = \perp$ e poi prosegue con le seguenti funzioni

f_5	$\perp$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 2\rfloor,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$
f_4	$\perp$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 2\rfloor,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$
f_3	$\perp$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 2\rfloor,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$
f_2	$\perp$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 2\rfloor,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$
f_1	$\perp$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$
$argomento:$	$\perp$	$\lfloor 0\rfloor$	$\lfloor 1\rfloor$	$\lfloor 2\rfloor$	$\lfloor 3\rfloor$	$\lfloor 4\rfloor$

f_5	$\lfloor(\perp,\lfloor 1\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 2\rfloor,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\lfloor 1\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$
f_4	$\lfloor(\perp,\lfloor 1\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 2\rfloor,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\lfloor 1\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$
f_3	$\lfloor(\perp,\lfloor 1\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$
f_2	$\lfloor(\perp,\lfloor 1\rfloor)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$
f_1	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$	$\lfloor(\perp,\perp)\rfloor$
$argomento:$	$\lfloor 5\rfloor$	$\lfloor 6\rfloor$	$\lfloor 7\rfloor$	$\lfloor 8\rfloor$	$\lfloor 9\rfloor$	$\lfloor 10\rfloor$

2.2 sull'input 2010

Si osserva che la funzione $\bar{f}$ è periodica con periodo 4, quindi $\bar{f}(\lfloor 2010\rfloor) = \bar{f}(\lfloor 2\rfloor) = \lfloor(\lfloor 1\rfloor,\lfloor 2\rfloor)\rfloor$

3 Bozza di soluzione appello 2010-11-05

3.1 possibile soluzione

Questa è basata sul fattoriale:

$$a = if\, x = 0\, then\, 1\, else\, x * f(x-1)$$
$$b = if\, x = 0\, then\, 1\, else\, (if\, x = 1\, then\, 1\, else\, x * f(x-1))$$

Le successioni $A^i(\perp)$ e $B^i(\perp)$ generate sono:

$A^4(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 6 \rfloor$	$\perp$
$A^3(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\perp$	$\perp$
$A^2(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$A^1(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$argomento:$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 3 \rfloor$	$\lfloor 4 \rfloor$

$B^4(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 6 \rfloor$	$\lfloor 24 \rfloor$
$B^3(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 6 \rfloor$	$\perp$
$B^2(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\perp$	$\perp$
$B^1(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$argomento:$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 3 \rfloor$	$\lfloor 4 \rfloor$

Per ogni i, $B^i(\perp)$ definisce "un punto in più" rispetto a $A^i(\perp)$, quindi $A^i(\perp) \sqsubset B^i(\perp)$ come richiesto. Il limite delle due successioni, ovvero la semantica di $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$, è la stessa funzione: il fattoriale.

3.2 altra possibile soluzione

Questa è basata sulla funzione costante 0:

$$a = if\, x = 0\, then\, 0\, else\, f(x-1)$$
$$b = if\, x \leq 1\, then\, 0\, else\, f(x-1)$$

Le successioni $A^i(\perp)$ e $B^i(\perp)$ generate sono:

$A^4(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$
$A^3(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$	$\perp$
$A^2(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$A^1(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$argomento:$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 3 \rfloor$	$\lfloor 4 \rfloor$

$B^4(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$
$B^3(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$
$B^2(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$	$\perp$
$B^1(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$argomento:$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 3 \rfloor$	$\lfloor 4 \rfloor$

Per ogni i, $B^i(\perp)$ definisce "un punto in più" rispetto a $A^i(\perp)$, quindi $A^i(\perp) \sqsubset B^i(\perp)$ come richiesto. Il limite delle due successioni, ovvero la semantica di $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$, è la stessa funzione: la funzione costante zero.

3.3 altra possibile soluzione

Questa è basata sulla funzione costante 0:

$$a = if\, x = 0\, then\, 0\, else\, f(x-1)$$
$$b = x * 0$$

Le successioni $A^i(\perp)$ e $B^i(\perp)$ generate sono:

$A^4(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$
$A^3(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$	$\perp$
$A^2(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$A^1(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$argomento:$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 3 \rfloor$	$\lfloor 4 \rfloor$

$B^4(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\cdots$
$B^3(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\cdots$
$B^2(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\cdots$
$B^1(\perp)$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\cdots$
$argomento:$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 3 \rfloor$	$\lfloor 4 \rfloor$	$\cdots$

L'espressione b non fa nessuna chiamata ricorsiva, pertanto la successione $B^i(\perp)$ si stabilizza subito al primo passo alla funzione costante 0. L'espressione a invece raggiunge lo stesso limite (funzione costante 0) piano piano, un punto alla volta, quindi $A^i(\perp) \sqsubset B^i(\perp)$ come richiesto.

4 Bozza di soluzione appello 2011-01-19

Una possibile espressione che soddisfa i requisiti è

$$e = \lambda x.\lambda y.if\, y < x\, then\, 7\, else\, e'$$

dove e' è una qualunque espressione di tipo nat che non termina, come ad esempio

$$e' = (rec\, f.\lambda z.f(z))\, 3$$

(non richiesto dall'esercizio, ma aggiunto per chiarezza: alcuni tipi coinvolti sopra sono $x : \mathsf{nat}$, $y : \mathsf{nat}$, $z : \mathsf{nat}$, $f : \mathsf{nat} \to \mathsf{nat}$, $e' : \mathsf{nat}$).

Il tipo di e è $\mathsf{nat} \to (\mathsf{nat} \to \mathsf{nat})$, quindi il tipo τ menzionato nell'esercizio è $\tau = \mathsf{nat} \to \mathsf{nat}$.

La semantica di e, ovvero $\lfloor E \rfloor = [[e]]\rho_0$ è la seguente:

$E(\lfloor 4 \rfloor)$	$\perp$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\perp$	$\cdots$
$E(\lfloor 3 \rfloor)$	$\perp$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\cdots$
$E(\lfloor 2 \rfloor)$	$\perp$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\cdots$
$E(\lfloor 1 \rfloor)$	$\perp$	$\lfloor 7 \rfloor$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\cdots$
$E(\lfloor 0 \rfloor)$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\cdots$
$argomento:$	$\perp$	$\lfloor 0 \rfloor$	$\lfloor 1 \rfloor$	$\lfloor 2 \rfloor$	$\lfloor 3 \rfloor$	$\lfloor 4 \rfloor$	$\cdots$

5 Bozza di soluzione appello 2011-02-02

Nota: quella che segue è una soluzione formale esaustiva. Si poteva anche ragionare usando la β-riduzione, in quanto se $e \to_\beta e'$ allora si ha $[[e]]\rho = [[e']]\rho$ e fare vedere in modo informale che le due equazioni proposte valgono quasi sempre. Il "quasi" è dovuto, per esempio, al fatto che quando c è un valore coppia si ha $c = \lfloor (P_1(c), P_2(c)) \rfloor$ per tutte le c *tranne* quando $c = \bot$. Analogamente, se F è un valore funzione $F = \lfloor \lambda x.F(x) \rfloor$ vale per tutte le F *tranne* che per $F = \bot$.

Preliminari Siano $v_1 = \lfloor F \rfloor \in (V_{\tau_1})_\bot$ e $v_2 = \lfloor G \rfloor \in (V_{\tau_2})_\bot$. Indico con λ il lambda "semantico", con Ap l'operatore semantico applicazione ($Ap(\bot, d) = \bot$ e $Ap(\lfloor H \rfloor, d) = H(d)$), con P_1, P_2 le proiezioni semantiche. Per definizione:

$$[[e_{12}]]\rho = \lfloor \lambda f.\lfloor \lambda c.\ Ap(Ap(f, P_1(c)), P_2(c)) \rfloor \rfloor$$

$$[[e_{21}]]\rho = \lfloor \lambda g.\lfloor \lambda x.\lfloor \lambda y.\ Ap(g, \lfloor (x, y) \rfloor) \rfloor \rfloor \rfloor$$

Prima equazione Dopo un po' di conti:

$$\begin{aligned} [[e_{21}(e_{12}f)]](\rho[f = v_1]) &= \lfloor \lambda x.\lfloor \lambda y.\ Ap(Ap(\lfloor F \rfloor, x), y) \rfloor \rfloor \\ &= \lfloor \lambda x.\lfloor \lambda y.\ Ap(F(x), y) \rfloor \rfloor \end{aligned}$$

Il valore di sopra non è perfettamente identico a $\lfloor F \rfloor$. Sia per esempio $F(\bot) = \bot$; $F(\lfloor n \rfloor) = \lfloor \lambda x.x \rfloor$. Quando $x = \bot$, si ha $F(x) = \bot$, mentre la funzione di sopra restituisce $\lfloor \lambda y.\ Ap(\bot, y) \rfloor \neq \bot$.

Non richiesto dall'esercizio: Se invece per ogni valore x abbiamo che $F(x) = \lfloor F_x \rfloor \neq \bot$, allora si ha che $\lfloor \lambda x.\lfloor \lambda y.\ Ap(F(x), y) \rfloor \rfloor = \lfloor \lambda x.\lfloor \lambda y.\ Ap(\lfloor F_x \rfloor, y) \rfloor \rfloor = \lfloor \lambda x.\lfloor \lambda y.\ F_x(y) \rfloor \rfloor = \lfloor \lambda x.\lfloor F_x \rfloor \rfloor = \lfloor \lambda x.F(x) \rfloor = \lfloor F \rfloor$, quindi sono identiche.

Seconda equazione Dopo un po' di conti:

$$\begin{aligned} [[e_{12}(e_{21}g)]](\rho[g = v_2]) &= \lfloor \lambda c.\ Ap(\lfloor G \rfloor, \lfloor (P_1(c), P_2(c)) \rfloor) \rfloor \\ &= \lfloor \lambda c.\ G(\lfloor (P_1(c), P_2(c)) \rfloor)) \rfloor \end{aligned}$$

Il valore di sopra non è perfettamente identico a $\lfloor G \rfloor$. Sia per esempio $G(\bot) = \bot$; $G(\lfloor (x, y) \rfloor) = \lfloor 5 \rfloor$. Quando $c = \bot$, si ha $G(c) = \bot$, mentre la funzione di sopra restituisce $G(\lfloor (\bot, \bot) \rfloor = \lfloor 5 \rfloor \neq \bot$.

Non richiesto dall'esercizio: Se invece per ogni valore c abbiamo che $G(c) = G(\lfloor (P_1(c), P_2(c)) \rfloor)$, allora si ha che $\lfloor \lambda c.\ G(\lfloor (P_1(c), P_2(c)) \rfloor)) \rfloor = \lfloor \lambda c.\ G(c)) \rfloor = \lfloor G \rfloor$, quindi sono identiche.