

# Linguaggi di Programmazione: Semantica

## 2010-11-05

Nota: svolgere questo esercizio su un foglio separato.

### Esercizio 3.

**Premessa.** Indicando con  $a$  e  $b$  due generiche espressioni del  $\lambda$ -calcolo tipato lazy, si considerino le seguenti espressioni costruite da esse:

$$\tilde{a} = \mathbf{rec} \ f. \ \lambda x. \ a \qquad \tilde{b} = \mathbf{rec} \ f. \ \lambda x. \ b$$

(Nota: le espressioni  $a$  e  $b$  possono avere come variabili libere  $f$  e  $x$ .)

Sia  $\rho_0$  l'ambiente "vuoto", ovvero costante  $\perp$ . Le due semantiche  $\llbracket \tilde{a} \rrbracket^{l\text{-CON}} \rho_0$  e  $\llbracket \tilde{b} \rrbracket^{l\text{-CON}} \rho_0$ , secondo il teorema di Knaster-Tarski, risultano essere le seguenti:

$$\llbracket \tilde{a} \rrbracket^{l\text{-CON}} \rho_0 = \bigsqcup_{i \geq 0} A^i(\perp) \qquad \llbracket \tilde{b} \rrbracket^{l\text{-CON}} \rho_0 = \bigsqcup_{i \geq 0} B^i(\perp)$$

dove  $A$  e  $B$  sono opportune funzioni continue tra un opportuno cpo  $D$  e se stesso.

**Quesito.** Si definiscano le espressioni  $a$  e  $b$ , e il cpo  $D$ , in modo da verificare simultaneamente le seguenti condizioni:

- $\llbracket \tilde{a} \rrbracket^{l\text{-CON}} \rho_0, \llbracket \tilde{b} \rrbracket^{l\text{-CON}} \rho_0 \in D$
- $\llbracket \tilde{a} \rrbracket^{l\text{-CON}} \rho_0 = \llbracket \tilde{b} \rrbracket^{l\text{-CON}} \rho_0$
- $A^i(\perp) \sqsubseteq B^i(\perp)$  per ogni  $i \geq 0$
- $A^i(\perp) \neq B^i(\perp)$  per ogni  $i \geq 1$

Si possono usare tutti i comuni operatori aritmetici nella definizione di  $a$  e  $b$ . Si giustifichi, almeno informalmente, la propria risposta. Fornire quindi i tipi delle variabili coinvolte.