Informatica — 2020-06-22

Nota: Scrivete su **tutti** i fogli nome e matricola.

Esercizio 1. *Dato un insieme di regole $\mathcal{R}$ su un universo U, si definisca l'associato operatore delle conseguenze immediate $\hat{\mathcal{R}} : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$. Si dimostri che è monotono.*

Esercizio 2. *Le seguenti regole definiscono induttivamente l'insieme T degli alberi binari di numeri naturali (regole $[T0], [T1]$), una relazione $R \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ (regole $[R0], [R1]$) e una relazione $Q \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{N})$ (regole $[Q0], [Q1], [Q2]$). Sotto, a, b, c, n indicano naturali mentre s, d, t indicano alberi in T.*

$$\frac{}{n}(n \in \mathbb{N})[T0] \qquad \frac{s \quad d}{(s,d)}[T1] \qquad \frac{a \le n \le b}{R(n,a,b)}[R0] \qquad \frac{R(s,a,c) \quad R(d,c,b) \quad a \le c \le b}{R((s,d),a,b)}[R1]$$

$$\frac{}{Q(n,n)}[Q0] \qquad \frac{Q(s,n)}{Q((s,d),n)}[Q1] \qquad \frac{Q(d,n)}{Q((s,d),n)}[Q2]$$

1. *[20%]*

   Si fornisca un albero t contenente esattamente 5 naturali per cui valga $R(t,1,20)$ e si giustifichi la risposta esibendo una derivazione.

2. *[20%] Si enunci il principio di induzione associato alla relazione R.*

3. *[10%] Si consideri l'enunciato seguente:*

   $$\forall t \in T.\ \forall a,b,n \in \mathbb{N}.\ R(t,a,b) \land Q(t,n) \implies a \le n \le b$$

   Si riscriva l'enunciato in modo logicamente equivalente nella forma

   $$\forall t \in T, a,b \in \mathbb{N}.\ R(t,a,b) \implies p(t,a,b)$$

   per un qualche predicato p.

4. *[50%] Si concluda la dimostrazione dell'enunciato visto sopra usando il principio di induzione associato a R.*

Soluzione (bozza).

Parte 1.

Una possibile soluzione è:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R(2,1,2)} \quad \dfrac{}{R(3,2,3)}}{R((2,3),1,3)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{R(4,3,4)} \quad \dfrac{\dfrac{}{R(5,4,5)} \quad \dfrac{}{R(6,5,20)}}{R((5,6),4,20)}}{R((4,(5,6)),3,20)}}{R(((2,3),(4,(5,6))),1,20)}$$

Parte 2.

Sia $p(t,a,b)$ un predicato sull'albero $t \in T$ e sui naturali a, b. Per dimostrare che per ogni t, a, b tali che $R(t,a,b)$ vale $p(t,a,b)$ è sufficiente verificare che:

$R0) \forall n,a,b \in \mathbb{N}. a \le n \le b \implies p(n,a,b)$
$R1) \forall a,b,c \in \mathbb{N}, s,f \in T. p(s,a,c) \land p(d,c,b) \land a \le c \le b \implies p((s,d),a,b)$

Parte 3.

Basta definire

$$p(t,a,b) : \forall n \in \mathbb{N}.\ Q(t,n) \implies a \le n \le b$$

Parte 4.

Procediamo quindi per induzione su R.
Caso $R0$.
Dobbiamo dimostrare

$$\forall \bar{n}, a, b \in \mathbb{N}. a \leq \bar{n} \leq b \implies p(\bar{n}, a, b)$$

Assumiamo quindi $IP1 : a \leq \bar{n} \leq b$ e dimostriamo $p(\bar{n}, a, b)$, cioè

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ Q(\bar{n}, n) \implies a \leq n \leq b$$

Assumiamo quindi $IP2 : Q(\bar{n}, n)$ e dimostriamo $a \leq n \leq b$.
Invertendo $IP2$, siccome può essere solo ricavata da $[Q0]$, otteniamo $\bar{n} = n$. Da questo e $IP1$ si ha la tesi.
Caso $R1$.
Dobbiamo dimostrare

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, s, f \in T. p(s, a, c) \wedge p(d, c, b) \wedge a \leq c \leq b \implies p((s, d), a, b)$$

Assumiamo quindi $IP1 : p(s, a, c)$, $IP2 : p(d, c, b)$, $IP3 : a \leq c \leq b$ e dimostriamo $p((s, d), a, b)$. Espandendo le formule, abbiamo:

$$\begin{aligned} IP1 &: \forall n_1 \in \mathbb{N}.\ Q(s, n_1) \implies a \leq n_1 \leq c \\ IP2 &: \forall n_2 \in \mathbb{N}.\ Q(d, n_2) \implies c \leq n_2 \leq b \\ tesi &: \forall n \in \mathbb{N}.\ Q((s, d), n) \implies a \leq n \leq b \end{aligned}$$

Assumiamo quindi $IP4 : Q((s, d), n)$ e dimostriamo la nuova tesi $a \leq n \leq b$.
Invertendo $IP4$, notiamo che può essere ricavato solo da $[Q1]$ o da $[Q2]$. Procediamo quindi per sottocasi:
Sottocaso $Q1$.
Qui abbiamo $IP5 : Q(s, n)$. Da questo e da $IP1$ (scegliendo $n_1 = n$), otteniamo $a \leq n \leq c$. Da questo e da $IP3$ otteniamo la tesi.
Sottocaso $Q2$.
Qui abbiamo $IP5 : Q(d, n)$. Da questo e da $IP2$ (scegliendo $n_2 = n$), otteniamo $c \leq n \leq b$. Da questo e da $IP3$ otteniamo la tesi.

□

Esercizio 3. *Sia S l'insieme delle sequenze di numeri naturali definito induttivamente dalle regole*

$$\frac{}{\epsilon}[S0] \qquad \frac{s}{n : s}(n \in \mathbb{N})[S1]$$

Queste sequenze possono essere ordinate in modo lessicografico*, con lo stesso criterio con cui si ordinano le parole di un dizionario viste come sequenze di lettere. Per esempio:*

A) $5 : 2 : \epsilon \preceq 6 : \epsilon$ B) $5 : 2 : \epsilon \preceq 5 : 7 : 1 : \epsilon$
C) $5 : 4 : 7 : 20 : \epsilon \preceq 5 : 6 : \epsilon$ D) $5 : 4 : \epsilon \preceq 5 : 4 : 2 : \epsilon$

1. *[50%] Si definisca induttivamente tale relazione $(\preceq) \in \mathcal{P}(S \times S)$ fornendo un opportuno insieme di regole di inferenza.*

2. *[50%] Usando le regole proposte per la relazione $(\preceq)$ sulle sequenze, si costruisca una derivazione per i casi* C *e* D *di sopra, menzionando il nome di ogni regola che si sta usando.*

Soluzione (bozza).
Parte 1.

Indichiamo con n, m dei naturali e con s, z delle sequenze.

$$\frac{}{\epsilon \preceq s}[L0] \qquad \frac{n < m}{(n : s) \preceq (m : z)}[L1] \qquad \frac{s \preceq z}{(n : s) \preceq (n : z)}[L2]$$

Parte 2.
Per C:

$$\cfrac{\cfrac{4 < 6}{4 : 7 : 20 : \epsilon \preceq 6 : \epsilon}[L1]}{5 : 4 : 7 : 20 : \epsilon \preceq 5 : 6 : \epsilon}[L2]$$

Per D:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\epsilon \preceq 2 : \epsilon}[L0]}{4 : \epsilon \preceq 4 : 2 : \epsilon}[L2]}{5 : 4 : \epsilon \preceq 5 : 4 : 2 : \epsilon}[L2]$$

$\square$

Nome ______________________________________ Matricola ______________

Esercizio 4. *Si dimostri formalmente la validità della tripla di Hoare seguente riempiendo le linee sottostanti con opportune asserzioni.*

$\{n \geq 27\}$

____

$n := 2 * n;$

____

while $n \geq 100$ do

____

____

if n *multiplo di* 4 then

____

____

$n := \lfloor n/2 \rfloor;$

____

$n := n - 4$

else

____

____

$n := n - 2$

____

$\{n \; pari \; \wedge \; 40 \leq n < 100\}$

Giustificare qui sotto eventuali usi della regola $PrePost$.

____

____

____

____

____

____

____

Soluzione (bozza).

$\{n \geq 27\}$ (1)
$\{2n \text{ pari } \wedge 2n \geq 40\}$
$n := 2 * n;$
$\{INV : n \text{ pari } \wedge n \geq 40\}$
while $n \geq 100$ do
    $\{INV \wedge n \geq 100\}$
    if n multiplo di 4 then
        $\{INV \wedge n \geq 100 \wedge n \text{ multiplo di } 4\}$ (2)
        $\{\lfloor n/2 \rfloor - 4 \text{ pari } \wedge \lfloor n/2 \rfloor - 4 \geq 40\}$
        $n := \lfloor n/2 \rfloor;$
        $\{n - 4 \text{ pari } \wedge n - 4 \geq 40\}$
        $n := n - 4$
    else
        $\{INV \wedge n \geq 100 \wedge n \text{ non multiplo di } 4\}$ (3)
        $\{n - 2 \text{ pari } \wedge n - 2 \geq 40\}$
        $n := n - 2$
$\{INV \wedge \neg(n \geq 100)\}$ (4)
$\{n \text{ pari } \wedge\ 40 \leq n < 100\}$

Per le PrePost:

1) $2n$ è sempre pari, e se $n \geq 27$, allora $2n \geq 54 \geq 40$.

2) Siccome n è multiplo di 4, allora $\lfloor n/2 \rfloor$ è uguale a $n/2$ che è un intero pari. Quindi anche $\lfloor n/2 \rfloor - 4$ è pari. Inoltre, visto che $n \geq 100$ per INV,

$$\lfloor n/2 \rfloor - 4 = n/2 - 4 \geq 100/2 - 4 = 46 \geq 40$$

3) Siccome n è pari per INV, $n - 2$ è pari. Inoltre, visto che $n \geq 100$ per INV, $n - 2 \geq 100 - 2 \geq 40$.

4) n pari è parte di INV, così come $40 \leq n$. Invece, $n < 100$ deriva da $\neg(n \geq 100)$.

$\square$