Informatica — 2020-02-10

Nota: Scrivete su **tutti** i fogli nome e matricola.

Esercizio 1. *Si forniscano tutte le regole della semantica big step* ($\rightarrow_b$) *relative ai comandi* $x := e$, $c_1; c_2$ *e* while. *Si commentino brevemente queste regole.*

Esercizio 2. *Le seguenti regole definiscono induttivamente l'insieme T degli alberi binari di numeri naturali (regole $[T0], [T1]$), una relazione $R \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{N})$ (regole $[R0], [R1]$) e una relazione $Q \in \mathcal{P}(T \times T)$ (regole $[Q0], [Q1]$). Sotto, n, m indicano naturali mentre s, s', d, d', t, u indicano alberi in T.*

$$\frac{}{n}(n \in \mathbb{N})[T0] \qquad \frac{s \quad d}{(s,d)}[T1] \qquad \frac{}{R(n,n)}[R0] \qquad \frac{R(s,n) \quad R(d,m) \quad n \geq m}{R((s,d),n)}[R1]$$

$$\frac{}{Q(n,n+1)}[Q0] \qquad \frac{Q(s,s') \quad Q(d,d')}{Q((s,d),(s',d'))}[Q1]$$

1. *[20%]*

   Si fornisca un albero t contenente esattamente 5 naturali distinti per cui valga $R(t,10)$ e si giustifichi la risposta esibendo una derivazione.

2. *[20%] Si enunci il principio di induzione associato alla relazione R.*

3. *[10%] Si consideri l'enunciato seguente:*

   $$\forall t, u \in T.\ \forall n \in \mathbb{N}.\ R(t,n) \wedge Q(t,u) \implies R(u, n+1)$$

   Si riscriva l'enunciato in modo logicamente equivalente nella forma

   $$\forall t \in T, n \in \mathbb{N}.\ R(t,n) \implies p(t,n)$$

   per un qualche predicato p.

4. *[50%] Si concluda la dimostrazione dell'enunciato visto sopra usando il principio di induzione associato a R.*

Soluzione (bozza).

Parte 1.

Una delle possibili soluzioni:

$$\frac{\dfrac{\overline{R(10,10)} \quad \overline{R(9,9)} \quad 10 \geq 9}{R((10,9),10)} \quad \dfrac{\dfrac{\overline{R(6,6)} \quad \overline{R(5,5)} \quad 6 \geq 5}{R((6,5),6)} \quad \overline{R(3,3)} \quad 6 \geq 3}{R(((6,5),3),6)} \quad 10 \geq 6}{R(((10,9),((6,5),3)),10)}$$

Parte 2.

Sia $p(-,-)$ una proprietà su un albero e un naturale. Affinché per ogni $t \in T, n \in \mathbb{N}$ tali che $R(t,n)$ valga $p(t,n)$ è sufficiente che:

$R0)$ $\forall n \in \mathbb{N}.\ p(n,n)$

$R1)$ $\forall s, d \in T, n, m \in \mathbb{N}.\ p(s,n) \wedge p(d,m) \wedge n \geq m \implies p((s,d),n)$

Parte 3.

Basta prendere $p(t,n) :\ \forall u \in T.\ Q(t,u) \implies R(u,n+1)$.

Parte 4.

Procediamo per induzione su R.

Caso $R0$.
Dobbiamo dimostrare $p(n, n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè

$$\forall u \in T.Q(n, u) \implies R(u, n+1)$$

Caso $R1$.
Assumiamo per ipotesi induttive $p(s, n)$ e $p(d, m)$ e cioè

$$IP1 : \forall u' \in T.Q(s, u') \implies R(u', n+1)$$
$$IP2 : \forall u'' \in T.Q(d, u'') \implies R(u'', m+1)$$

Assumiamo anche la condizione a lato $IP3 : n \geq m$. Dobbiamo dimostrare la tesi $p((s, d), n)$, e cioè:

$$\forall u \in T.Q((s, d), u) \implies R(u, n+1)$$

Possiamo quindi assumere $IP4 : Q((s, d), u)$ e dimostrare la nuova tesi $R(u, n+1)$.

Invertendo $IP4$, siccome può essere derivata solo da $[Q1]$, otteniamo $u = (s', d')$ con $IP5 : Q(s, s')$ e $IP6 : Q(d, d')$.

Usando $IP1$ (scegliendo $u' = s'$) con $IP5$, otteniamo $IP7 : R(s', n+1)$.

Usando $IP2$ (scegliendo $u'' = d'$) con $IP6$, otteniamo $IP8 : R(d', m+1)$.

Da $IP3$ si ha $IP9 : n+1 \geq m+1$.

Usando la regola $[R1]$ su $IP7, IP8, IP9$, si ricava $R((s', d'), n+1)$, che la tesi visto che $u = (s', d')$.

$\square$

Esercizio 3. *Si consideri la generalizzazione delle regole di inferenza ottenuta consentendo, oltre alle normali premesse, anche la presenza di "premesse negative", come mostrato sotto. La funzione $\hat{\mathcal{R}}$ viene quindi estesa a insiemi di tali regole $\mathcal{R}$ come segue.*

$$\textit{nuova forma generale di una regola:} \quad \frac{x_1 \dots x_n \quad \neg z_1 \dots \neg z_m}{y}$$

$$\hat{\mathcal{R}}(X) = \left\{ y \;\middle|\; \exists \frac{x_1 \dots x_n \quad \neg z_1 \dots \neg z_m}{y} \in \mathcal{R}.\ x_1, \dots, x_n \in X \wedge z_1, \dots, z_m \notin X \right\}$$

1. *[40%] Si definisca $\mathcal{R}$ come l'insieme delle regole su $U = \mathbb{N}$ dato da $\left\{ \frac{\neg x}{x} \;\middle|\; x \in \mathbb{N} \right\}$. Si stabilisca se $\hat{\mathcal{R}}$ è una funzione monotona, fornendo una dimostrazione o un controesempio.*

2. *[60%] Considerando sempre lo stesso $\hat{\mathcal{R}}$ del punto sopra, si caratterizzi l'insieme dei punti prefissi di $\hat{\mathcal{R}}$, stabilendo se esiste il suo minimo punto prefisso.*

Soluzione (bozza).

Parte 1. Per ogni $X \subseteq U = \mathbb{N}$, si ha $\hat{\mathcal{R}}(X) = \{n \in \mathbb{N} | n \notin X\} = \mathbb{N} \setminus X$. La funzione $\hat{\mathcal{R}}$ non è monotona, in quanto per esempio $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ ma invece si ha $\hat{\mathcal{R}}(\emptyset) = \mathbb{N} \not\subseteq \emptyset = \hat{\mathcal{R}}(\mathbb{N})$.

Parte 2. Un punto prefisso X di $\hat{\mathcal{R}}$ deve soddisfare $\hat{\mathcal{R}}(X) = \mathbb{N} \setminus X \subseteq X$, cioè X deve includere il suo complementare. Questo è possibile se e solo se il complementare è vuoto, ovvero se $X = \mathbb{N}$. Si conclude che l'insieme dei punti prefissi è il singoletto $\{\mathbb{N}\}$, e che $X = \mathbb{N}$ essendo l'unico punto prefisso è anche il minimo.

$\square$

Nome ______________________________________ Matricola ______________

Esercizio 4. *Si dimostri formalmente la validità della tripla di Hoare seguente riempiendo le linee sottostanti con opportune asserzioni.*

$\{x = y = 0 \wedge n \geq 0\}$

____

while $x < n$ do

____

____

if $x < n - 3$ then

____

____

$y := 4 * x + 4 + y;$

____

$x := x + 2$

else

____

____

$y := 2 * x + 1 + y;$

____

$x := x + 1$

____

$\{y = n^2\}$

Giustificare qui sotto eventuali usi della regola $PrePost$.

____

____

____

____

____

____

____

Soluzione (bozza).

$$
\begin{array}{l}
\{x = y = 0 \land n \geq 0\}\ (1) \\
\{INV : y = x^2 \land x \leq n\} \\
\textsf{while } x < n \textsf{ do} \\
\quad \{INV \land x < n\} \\
\quad \textsf{if } x < n - 3 \textsf{ then} \\
\quad\quad \{INV \land x < n \land x < n - 3\}\ (2) \\
\quad\quad \{4x + 4 + y = (x + 2)^2 \land x + 2 \leq n\} \\
\quad\quad y := 4 * x + 4 + y; \\
\quad\quad \{y = (x + 2)^2 \land x + 2 \leq n\} \\
\quad\quad x := x + 2 \\
\quad \textsf{else} \\
\quad\quad \{INV \land x < n \land \neg(x < n - 3)\}\ (3) \\
\quad\quad \{2x + 1 + y = (x + 1)^2 \land x + 1 \leq n\} \\
\quad\quad y := 2 * x + 1 + y; \\
\quad\quad \{y = (x + 1)^2 \land x + 1 \leq n\} \\
\quad\quad x := x + 1 \\
\{INV \land \neg(x < n)\}\ (4) \\
\{y = n^2\}
\end{array}
$$

Per le PrePost:

1) Banale aritmetica.

2) Sostituendo y come da ipotesi, si ha $4x+4+y = 4x+4+x^2 = (x+2)^2$. Dall'ipotesi $x < n - 3$ si ha $x + 3 < n$ da cui a maggior ragione $x + 2 \leq n$.

3) Sostituendo y come da ipotesi, si ha $2x+1+y = 2x+1+x^2 = (x+1)^2$. Dall'ipotesi $x < n$ si ha $x + 1 \leq n$ visto che sono numeri interi.

4) Siccome per INV si ha $x \leq n$ ma per ipotesi $\neg(x < n)$, abbiamo $x = n$. Per ipotesi $y = x^2$ e quindi $y = n^2$ che è la tesi.

$\square$