Informatica — 2017-02-13

Nota: Scrivete su **tutti** i fogli nome e matricola.

Esercizio 1. *Enunciare e dimostrare il teorema di Knaster-Tarski.*

Esercizio 2. *Le seguenti regole definiscono induttivamente l'insieme S delle sequenze di numeri naturali (regole $[S0], [S1]$) e due relazioni tra sequenze $R, T \in \mathcal{P}(S \times S)$ (regole $[R0], [R1]$ e $[T0], [T1]$). Sotto, n, m indicano naturali mentre s, t, u indicano sequenze.*

$$\frac{}{\epsilon}[S0] \qquad \frac{s}{n : s}[S1] \qquad \frac{}{R(\epsilon, \epsilon)}[R0] \qquad \frac{R(s,t)}{R(n : s, n : n : t)}[R1]$$

$$\frac{}{T(\epsilon, \epsilon)}[T0] \qquad \frac{T(s,t)}{T(n : m : s, n : t)}[T1]$$

1. *[15%] Si trovi $s \in S$ tale che $R(1 : 2 : 3 : \epsilon, s)$, mostrando una derivazione.*
2. *[15%] Si trovi $s \in S$ tale che $T(1 : 2 : 3 : 4 : \epsilon, s)$, mostrando una derivazione.*
3. *[70%] Si dimostri che*

$$\forall s, t, u \in S.\ R(s,t) \wedge T(t,u) \implies s = u$$

(Suggerimento: si proceda per induzione su $s \in S$.)

Soluzione (bozza). Parte 1

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{R(\epsilon, \epsilon)}}{R(3 : \epsilon, 3 : 3 : \epsilon)}}{R(2 : 3 : \epsilon, 2 : 2 : 3 : 3 : \epsilon)}}{R(1 : 2 : 3 : \epsilon, 1 : 1 : 2 : 2 : 3 : 3 : \epsilon)}$$

Parte 2

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{T(\epsilon, \epsilon)}}{T(3 : 4 : \epsilon, 3 : \epsilon)}}{T(1 : 2 : 3 : 4 : \epsilon, 1 : 3 : \epsilon)}$$

Parte 3
Definiamo

$$p(s) :\ \forall t, u \in S.\ R(s,t) \wedge T(t,u) \implies s = u$$

e procediamo per induzione su $s \in S$.

(Caso $S0$) Dimostriamo $p(\epsilon)$.

$$\forall t, u \in S.\ R(\epsilon, t) \wedge T(t, u) \implies \epsilon = u$$

Assumiamo quindi $IP1 : R(\epsilon, t)$ e $IP2 : T(t, u)$, e dimostriamo $\epsilon = u$.

Invertendo $IP1$, siccome si può derivare solo dalla regola $[R0]$, otteniamo $t = \epsilon$.

Invertendo $IP2 : T(\epsilon, u)$, siccome si può derivare solo dalla regola $[T0]$, otteniamo $u = \epsilon$, che è la tesi.

(Caso $S1$) Assumiamo l'ipotesi induttiva $IP1 :\ p(s)$

$$\forall \bar{t}, \bar{u} \in S.\ R(s, \bar{t}) \wedge T(\bar{t}, \bar{u}) \implies s = \bar{u}$$

e dimostriamo $p(n : s)$

$$\forall t, u \in S.\ R(n : s, t) \wedge T(t, u) \implies n : s = u$$

Assumiamo $IP2 : R(n : s, t)$ e $IP3 : T(t, u)$.

Invertendo $IP2$, siccome si può derivare solo dalla regola $[R1]$, otteniamo $t = n : n : t'$ e $IP4 : R(s, t')$.

Invertendo $IP3 : T(n : n : t', u)$, siccome si può derivare solo dalla regola $[T1]$, otteniamo $u = n : u'$ e $IP5 : T(t', u')$.

Da $IP1$, scegliendo $\bar{t} = t'$ e $\bar{u} = u'$ si ha

$$R(s, t') \wedge T(t', u') \implies s = u'$$

L'antecedente vale per $IP4, IP5$, quindi $s = u'$, da cui $n : s = n : u' = u$ che è la tesi.

$\square$

Esercizio 3. *Si estenda il linguaggio IMP con il seguente comando. Si chiami Com^+ l'insieme dei comandi del linguaggio così esteso.*

$$\begin{array}{l} \textsf{cwhile } e \neq 0 \textsf{ do} \\ \quad c_1 \\ \quad \textsf{continue if } e' \neq 0 \\ \quad c_2 \end{array}$$

La semantica intuitiva del ciclo cwhile *è la seguente. Come prima cosa, viene valutata e: se il risultato è zero, il ciclo si ferma. Altrimenti, viene eseguito c_1. Dopo, viene valutata e': se è diversa da 0, il ciclo si riesegue da capo. Altrimenti, viene eseguito c_2 e poi il ciclo si riesegue da capo.*

1. *[50%] Si formalizzi la semantica big step ($\rightarrow_b$) del linguaggio esteso, fornendo una o più regole di inferenza aggiuntive rispetto a quelle per IMP.*

2. *[50%] Si definisca induttivamente tramite un insieme di regole di inferenza, una relazione $P \in \mathcal{P}(Com^+ \times Com)$ tale per cui, per ogni comando $c \in Com^+$, esista un comando $c' \in Com$ tale per cui (nel linguaggio esteso) c e c' siano equivalenti e valga $P(c, c')$. (Non si chiede di dimostrare l'equivalenza)*

Soluzione (bozza).
Parte 1

$$\frac{\langle e, \sigma \rangle \to_e 0}{\langle \mathsf{cwhile}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c_1\ \mathsf{continue\ if}\ e' \neq 0\ c_2, \sigma \rangle \to_b \sigma}[CW-1]$$

$$\frac{\langle e, \sigma \rangle \to_e v \neq 0 \qquad \langle c_1, \sigma \rangle \to_b \sigma' \qquad \langle e', \sigma' \rangle \to_e v' \neq 0 \qquad \langle \mathsf{cwhile}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c_1\ \mathsf{continue\ if}\ e' \neq 0\ c_2, \sigma' \rangle \to_b \sigma''}{\langle \mathsf{cwhile}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c_1\ \mathsf{continue\ if}\ e' \neq 0\ c_2, \sigma \rangle \to_b \sigma''}[CW-2]$$

$$\frac{\langle e, \sigma \rangle \to_e v \neq 0 \qquad \langle c_1, \sigma \rangle \to_b \sigma' \qquad \langle e', \sigma' \rangle \to_e 0 \qquad \langle c_2; \mathsf{cwhile}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c_1\ \mathsf{continue\ if}\ e' \neq 0\ c_2, \sigma' \rangle \to_b \sigma''}{\langle \mathsf{cwhile}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c_1\ \mathsf{continue\ if}\ e' \neq 0\ c_2, \sigma \rangle \to_b \sigma''}[CW-3]$$

Parte 2

$$\frac{}{P(\mathsf{skip}, \mathsf{skip})}$$

$$\frac{}{P(x := e, x := e)}$$

$$\frac{P(c_1, c_1') \qquad P(c_2, c_2')}{P(c_1; c_2, c_1'; c_2')}$$

$$\frac{P(c_1, c_1') \qquad P(c_2, c_2')}{P(\mathsf{if}\ e \neq 0\ \mathsf{then}\ c_1\ \mathsf{else}\ c_2, \mathsf{if}\ e \neq 0\ \mathsf{then}\ c_1'\ \mathsf{else}\ c_2')}$$

$$\frac{P(c, c')}{P(\mathsf{while}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c, \mathsf{while}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c')}$$

$$\frac{P(c_1, c_1') \qquad P(c_2, c_2')}{P(\mathsf{cwhile}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ c_1\ \mathsf{continue\ if}\ e' \neq 0\ c_2, \mathsf{while}\ e \neq 0\ \mathsf{do}\ (c_1'; \mathsf{if}\ e' \neq 0\ \mathsf{then\ skip\ else}\ c_2'))}$$

□

Nome ______________________________ Matricola ____________

Esercizio 4. *Si dimostri formalmente la validità della tripla di Hoare seguente riempiendo le linee sottostanti con opportune asserzioni.*

$\{a = A \wedge b = B \geq 0\}$

____

$x := a;$

____

$y := b;$

____

while $y > 0$ do

____

____

$x := x - 1;$

____

$y := y - 1$

____

$\{x = A - B\}$

Giustificare qui sotto eventuali usi della regola $PrePost$.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Soluzione (bozza).

$\{a = A \wedge b = B \geq 0\}$ (1)
$\{a = A - B + b \wedge b \geq 0\}$
$x := a;$
$\{x = A - B + b \wedge b \geq 0\}$
$y := b;$
$\{INV: \ x = A - B + y \wedge y \geq 0\}$
while $y > 0$ do
    $\{INV \wedge y > 0\}$ (2)
    $\{x - 1 = A - B + y - 1 \wedge y - 1 \geq 0\}$
    $x := x - 1;$
    $\{x = A - B + y - 1 \wedge y - 1 \geq 0\}$
    $y := y - 1$
$\{INV \wedge \neg(y > 0)\}$ (3)
$\{x = A - B\}$

Per le PrePost:

1) Semplice aritmetica.

2) Siccome da INV si ha $x = A - B + y$, basta sottrarre 1 da entrambi i lati per ottenere $x - 1 = A - B + y - 1$. Per ipotesi si ha anche $y > 0$ che implica $y \geq -1$ visto che y è intero, e quindi $y - 1 \geq 0$.

3) Da INV si ha $y \geq 0$ e per ipotesi $\neg(y > 0)$, quindi $y = 0$ e da INV si ricava $x = A - B + y = A - B$ che è la tesi. $\square$