Informatica — 2014-06-25

Nota: Scrivete su **tutti** i fogli nome e matricola.

Esercizio 1. *Si enunci il teorema di correttezza del sistema deduttivo per le triple di Hoare. Dopo, si definisca la proprietà induttiva che è alla base della dimostrazione di tale teorema, spiegandone l'attinenza all'enunciato. Infine, si dimostri il teorema limitatamente al caso della regola $Comp$ della semantica, e senza considerare la regola $PrePost$ del sistema deduttivo.*

Esercizio 2. *Si consideri l'estensione di IMP ottenuta aggiungendo il comando "*assegnamento simultaneo*"*

$$Com ::= \ \dots \ \mid \ x_1, x_2 := e_1, e_2$$

dove x_1, x_2 sono variabili distinte e e_1, e_2 sono espressioni intere. La semantica informale di tale costrutto è la seguente. Come prima cosa, si valutano le espressioni e_1 ed e_2, ricavandone i relativi risultati z_1 e z_2. Infine, si modificano i valori delle variabili x_1 e x_2 in modo che x_1 valga z_1 e x_2 valga z_2.

1. *Usando l'assegnamento simultaneo, si definisca un comando che scambi i valori delle variabili a e b.*

2. *Si stabilisca se vale l'equivalenza tra i comandi*

   $$x_1, x_2 := e_1, e_2 \qquad \equiv \qquad x_1 := e_1; x_2 := e_2$$

   giustificando informalmente *la risposta.*

3. *Si formalizzi la semantica big-step dell'assegnamento simultaneo aggiungendo una o più regole di inferenza alla semantica di IMP.*

Soluzione (bozza). Punto 1. Basta usare $a, b := b, a$.

Punto 2. Non vale l'equivalenza. Per esempio, $a, b := b, a$ scambia le due variabili mentre $a := b; b := a$ imposta entrambe a b.

Punto 3. Basta aggiungere la regola

$$\frac{\langle e_1, \sigma \rangle \to_e z_1 \qquad \langle e_2, \sigma \rangle \to_e z_2}{\langle x_1, x_2 := e_2, e_2 \ , \ \sigma \rangle \to_b \sigma[x_1 \mapsto z_1][x_2 \mapsto z_2]} [SimLet]$$

□

Esercizio 3. *Sia U un insieme universo, A un sottoinsieme di U e $f : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$ una funzione continua secondo Scott. Si pongano quindi*

$$\begin{array}{ll} g : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U) & h : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U) \\ g(X) = f(A \cap X) & h(X) = A \cap f(X) \end{array}$$

Si dimostri che i minimi punti fissi $fix(g)$ e $fix(h)$ esistono e che $A \cap fix(g) = fix(h)$

Soluzione (bozza). Per dimostrare che esistono i minimi punti fissi, basta dimostrare che le due funzioni g, h sono monotone Questo si può verificare facilmente, ma in vista della dimostrazione dell'uguaglianza $A \cap fix(g) = fix(h)$ dimostriamo direttamente che g, h sono continue secondo Scott, in modo da sfruttare il teorema di Kleene. Anche questa è una verifica semplice: se $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è crescente:

$$\begin{array}{lll} & g(\bigcup_i X_i) & \\ = & f(A \cap \bigcup_i X_i) & \text{definizione } g \\ = & f(\bigcup_i A \cap X_i) & \text{proprietà } \bigcup \\ = & \bigcup_i f(A \cap X_i) & \text{continuità } f,\ \{A \cap X_i\}_i \text{ crescente} \\ = & \bigcup_i g(X_i) & \text{definizione } g \end{array}$$

da cui segue che g è continua. Inoltre

$$\begin{array}{lll} & h(\bigcup_i X_i) & \\ = & A \cap f(\bigcup_i X_i) & \text{definizione } h \\ = & A \cap \bigcup_i f(X_i) & \text{continuità } f,\ \{X_i\}_i \text{ crescente} \\ = & \bigcup_i A \cap f(X_i) & \text{proprietà } \bigcup \\ = & \bigcup_i h(X_i) & \text{definizione } h \end{array}$$

da cui segue che h è continua.

Dobbiamo ora dimostrare che

$$A \cap fix(g) = fix(h)$$

cioè che, grazie al teorema di Kleene ed alla continuità di g, h

$$A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^n(\emptyset) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h^n(\emptyset)$$

L'equazione sopra si può riscrivere come

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap g^n(\emptyset) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h^n(\emptyset)$$

Per dimostrare quanto sopra, dimostriamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$A \cap g^n(\emptyset) = h^n(\emptyset)$$

Procediamo per induzione su n. Per $n = 0$ si ha

$$A \cap g^0(\emptyset) = A \cap \emptyset = \emptyset = h^0(\emptyset)$$

Supponendo l'uguaglianza per n, la verifichiamo per $n + 1$:

$$\begin{array}{lll}
& A \cap g^{n+1}(\emptyset) & \\
= & A \cap g(g^n(\emptyset)) & \\
= & A \cap f(A \cap g^n(\emptyset)) & \text{definizione } g \\
= & A \cap f(h^n(\emptyset)) & \text{ipotesi induttiva} \\
= & h(h^n(\emptyset)) & \text{definizione } h \\
= & h^{n+1}(\emptyset) &
\end{array}$$

$\square$

Nome ________________________________ Matricola ____________

Esercizio 4. *Si dimostri formalmente la validità della tripla di Hoare seguente riempiendo le linee sottostanti con opportune asserzioni.*

$\{n = N \geq 0\}$

____

$q := 0;$

____

$n := n - 1;$

____

while $n \geq 0$ do

    ____

    ____

    $q := q + 1 + 2 \cdot n;$

    ____

    $n := n - 1$

____

$\{q = N^2\}$

Giustificare qui sotto eventuali usi della regola $PrePost$.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Soluzione (bozza).

$\{n = N \geq 0\}$
$\{0 = N^2 - (n-1+1)^2 \ \wedge \ n-1 \geq -1\}$ (1)
$q := 0;$
$\{q = N^2 - (n-1+1)^2 \ \wedge \ n-1 \geq -1\}$
$n := n-1;$
$\{INV : q = N^2 - (n+1)^2 \ \wedge \ n \geq -1\}$
while $n \geq 0$ do
  $\{INV \wedge n \geq 0\}$
  $\{q + 1 + 2 \cdot n = N^2 - (n-1+1)^2 \ \wedge \ n-1 \geq -1\}$ (2)
  $q := q + 1 + 2 \cdot n;$
  $\{q = N^2 - (n-1+1)^2 \ \wedge \ n-1 \geq -1\}$
  $n := n-1$
$\{INV \wedge \neg(n \geq 0)\}$
$\{q = N^2\}$ (3)

La *PrePost* (1) richiede solo un po' di aritmetica.

Per la *PrePost* (2), la parte $n-1 \geq -1$ segue dalla guardia $n \geq 0$. Per l'altra parte, si può usare l'ipotesi INV per rimpiazzare q con $N^2 - (n+1)^2$ e vedere che

$$(N^2 - (n+1)^2) + 1 + 2 \cdot n = N^2 - (n-1+1)^2$$

Per la *PrePost* (3), basta ricavare $n = -1$ dalle ipotesi, e poi semplificare INV. □