Indice

Preliminari sulla Logica

Introduzione

La logica è una disciplina che ha da tempo acquisito una decisa autonomia ed è articolata in svariati settori, spesso alquanto eterogenei per obiettivi e metodi, nei quali operano specialisti come in ogni altro ramo dell'impresa scientifica. È assai arduo proporre una caratterizzazione della logica che possa, da un lato, tener conto delle sue molteplici diramazioni e, dall'altro, essere così circostanziata da delimitare in modo sufficientemente preciso il suo ambito e le sue metodologie. In queste lezioni, comunque, siamo interessati sostanzialmente ad uno solo degli aspetti dell'ampio ventaglio delle ricerche condotte nell'ambito della logica, ossia a quello storicamente più antico e più specifico, che si prefigge l'analisi e la caratterizzazione dei procedimenti deduttivi, l'individuazione e l'esplicitazione dei canoni del corretto dedurre e, non secondariamente, del linguaggio mediante il quale si esprimono i ragionamenti stessi.

Uno dei compiti principali della logica è quello di *studiare il nesso di conseguenza logica tra proposizioni*, predisponendo delle tecniche per determinare quando la verità di una conclusione consegue necessariamente dalla verità delle premesse (*ars demonstrandi*). Un altro aspetto, strettamente collegato con il precedente, è quello di determinare, date certe premesse, altre proposizioni che sono loro conseguenza logica (*ars inveniendi*). Se i criteri per stabilire quando un'argomentazione è convincente o persuasiva sono di assai difficile esplicitazione e rigorizzazione – e rientrano nella cosiddetta *teoria dell'argomentazione* – è possibile individuare delle regole che consentono di passare da un insieme di premesse a una conclusione che ne è conseguenza logica. La logica, quindi, contrariamente ad un'opinione diffusa che la identifica genericamente con l'arte del ragionamento, va intesa, almeno in prima approssimazione, come *lo studio delle regole di inferenza che sono corrette*, ossia che conducono a conclusioni vere, qualora applicate a premesse che risultano vere, vale a dire *regole che rispettano il nesso di conseguenza logica.*

Vediamo ora di precisare meglio alcuni aspetti fondamentali dell'indagine logica. In primo luogo va ribadito che lo studio dei ragionamenti si rivolge a quelli già *esplicitati* in una qualche forma di linguaggio, e non all'attività del ragionare, ai processi interni del pensiero; almeno da Frege in poi è divenuta chiara la divaricazione tra la psicologia e la logica, dato che quest'ultima si rivolge non all'attività della nostra mente, ma semmai al "pensato", una volta che questo è stato comunicato attraverso qualche forma di linguaggio. In secondo luogo, in riferimento al linguaggio naturale, si può osservare che solo una parte di esso viene comunemente impiegata nell'attività inferenziale: già a partire da Aristotele la logica si è rivolta al discorso assertorio, cioè quello costituito da enunciati che possono essere veri o falsi. D'altra parte, l'obiettivo "primario" non è costituito dall'analisi dei ragionamenti condotti nei linguaggi naturali. Infatti, nel prossimo paragrafo cercheremo di chiarire come la logica richieda l'introduzione di un linguaggio artificiale che, seppure modellato avendo presenti alcune caratteristiche dei linguaggi naturali – vale a dire quelle che intervengono nell'attività deduttiva –, non può affatto identificarsi con un frammento di uno di essi, in quanto vuole proporsi come non riferentesi ad uno specifico contenuto, cioè come dotato di un preciso significato, ma piuttosto come un contenitore potenziale di differenti significati particolari.

La dimensione formale della logica

Se si considerano i tre seguenti esempi di ragionamento:

$$\begin{array}{l} \textit{2 è minore di 5} \\ \textit{Se un numero è minore di un altro, allora il secondo è maggiore del primo} \\ \hline \textit{5 è maggiore di 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textit{La retta r è perpendicolare alla retta s} \\ \textit{Se un retta è perpendicolare ad un'altra, allora la seconda è incidente alla prima} \\ \hline \textit{s è incidente ad r} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textit{Mario è nipote di Aldo} \\ \textit{Se una persona è nipote di un'altra, allora quest'ultima è zio della prima} \\ \hline \textit{Aldo è zio di Mario} \end{array}$$

si può immediatamente constatare la loro strettissima analogia. In tutti e tre una premessa afferma il sussistere di una certa relazione fra un individuo e un altro; l'altra premessa che il sussistere di questa relazione comporta, qualsiasi siano i due individui, il sussistere di un'altra relazione tra il secondo individuo e il primo; la conclusione afferma che quest'ultima relazione sussiste fra il secondo e il primo individuo menzionati nella prima premessa. Si dice che i tre ragionamenti hanno la stessa *forma logica.* Per il sussistere del nesso di conseguenza logica non è importante la natura degli individui menzionati (numeri, rette, persone), né delle relazioni coinvolte (minore e maggiore, perpendicolare e incidente, nipote e zio), quanto i nessi stabiliti fra le premesse e la conclusione. Appare allora del tutto naturale rendere trasparente quanto è sufficiente a garantire il riconoscimento del nesso di conseguenza logica con una opportuna riscrittura. Se indichiamo con a e b i due individui, con R la prima relazione, con S la seconda (ovvero indichiamo con lettere gli elementi "variabili" nei tre ragionamenti) si ottiene:

$$\begin{array}{l} \textit{Rab} \\ \textit{per ogni due individui x,y, se Rxy, allora Syx} \\ \hline \textit{Sba} \end{array} \qquad (*)$$

Il nesso di conseguenza logica acquista significato proprio in relazione a scritture come questa, in cui figurano dei termini il cui valore è indeterminato. Ritornando al primo dei tre esempi di ragionamento, le due premesse sono vere e la conclusione è vera e, quindi, non appare molto sensato affermare che il ragionamento è corretto poiché, se le premesse sono vere, lo è anche la conclusione, dato che, di fatto, le premesse e la conclusione sono vere. Nel caso di (*), invece, ha perfettamente senso dire, ad esempio, "se Rab è vera" in quanto, a seconda del significato di a, di b e di R, Rab potrà essere vera (ad esempio se $a = 2$, $b = 5$, $R =$ minore, oppure se $a = 6$, $b = 3$, $R =$ doppio) oppure falsa (se $a = 7$, $b = 5$, $R =$ minore, oppure se $a = 6$, $b = 4$, $R =$ doppio). Il nesso di conseguenza logica, e quindi la correttezza del ragionamento, sussiste perché, qualsiasi siano gli individui denotati da a e da b, e le relazioni denotate da R e da S, *se le premesse sono vere, allora è vera anche la conclusione.*

Ciò che abbiamo evidenziato in questo caso particolare accade in generale: se da alcune premesse discende logicamente una conclusione, lo stesso accade in tutte le situazioni in cui le premesse e la conclusione hanno la stessa forma logica. L'individuazione della forma logica avviene con riferimento a un linguaggio le cui espressioni non sono né vere, né false, ma che sono suscettibili di molteplici interpretazioni (e solo dopo una interpretazione assumono un significato preciso).

L'uso dei simboli, ossia il passaggio ad (*), non è essenziale (nulla vieta, nel primo ragionamento, di prescindere dal significato di 2, 5, minore e maggiore), ma facilita enormemente l'analisi logica del ragionamento. Inoltre, come vedremo in seguito, si rivela opportuno formalizzare anche le restanti parti degli enunciati di partenza, per cui, in definitiva, la (*) verrà ad assumere, dopo le precisazioni che faremo in seguito, la seguente configurazione:

$$\frac{\begin{array}{l} Rab \\ \forall x \forall y (Rxy \to Syx) \end{array}}{Sba} \tag{**}$$

e, per indicare che il ragionamento è corretto, si scrive:

$$\{Rab,\ \forall x \forall y (Rxy \to Syx)\} \models Sba$$

(che si legge:“la proposizione Sba è conseguenza logica dell'insieme di proposizioni $\{Rab, \forall x \forall y (Rxy \to Syx)\}$”); si omettono poi per brevità le parentesi graffe:

$$Rab,\ \forall x \forall y (Rxy \to Syx) \models Sba.$$

La logica come teoria formale, simbolica e matematica

La logica, dunque, è una disciplina formale: l'individuazione della correttezza dei ragionamenti si basa sulla *forma* degli enunciati che intervengono in essi, prescindendo dai loro specifici contenuti. Il problema di definire con esattezza cosa si intenda per “forma logica” è arduo, non ha una soluzione definitiva e non è possibile affrontarlo in via preliminare. Ai nostri scopi è sufficiente la caratterizzazione intuitiva secondo la quale la forma logica è determinata da quei termini del discorso (detti *sincategorematici*) i quali non hanno un vero e proprio significato, ma agiscono sul significato di altri termini dando luogo a nuovi termini dotati di significato. Negli esempi precedenti, sono termini dotati di significato proprio (detti *categorematici*) 2, 5, minore, maggiore, la retta r, perpendicolare, incidente, ecc. (quelli che abbiamo simbolizzato nella (*)), mentre sono sincategorematici i termini ”tutti” e “se ..., allora ...” (vale a dire quelli che abbiamo lasciato non simbolizzati nella (*)).

Occorre distinguere *correttezza* di un ragionamento da *verità* delle conclusioni. Consideriamo i seguenti esempi:

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Napoleone è francese} \\ \textit{Tutti i francesi sono corsi} \end{array}}{\textit{Napoleone è corso}} \tag{1}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Napoleone è genovese} \\ \textit{Tutti i genovesi sono cinesi} \end{array}}{\textit{Napoleone è cinese}} \tag{2}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Napoleone è corso} \\ \textit{Tutti i corsi sono francesi} \end{array}}{\textit{Napoleone è francese}} \tag{3}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Napoleone è cinese} \\ \textit{Tutti i cinesi sono corsi} \end{array}}{\textit{Napoleone è corso}} \tag{4}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \textit{Napoleone è francese} \\ \textit{Tutti i francesi sono europei} \end{array}}{\textit{Napoleone è corso}} \tag{5}$$

I primi quattro ragionamenti sono corretti; tuttavia in (1) la conclusione è vera e una premessa è falsa, in (2) la conclusione è falsa e entrambe le premesse sono false, in (3) le premesse sono vere e la conclusione vera, in (4) le premesse sono false e la conclusione vera. La forma logica (simbolica) di questi primi quattro ragionamenti è:

$$\begin{array}{l} Pa \\ \forall x(Px \to Qx) \\ \hline Qa \end{array} \qquad (***)$$

La correttezza del ragionamento esclude che si possa presentare il caso in cui le premesse sono entrambe vere e la conclusione falsa; gli altri casi sono tutti possibili. In (5), anche se le premesse e la conclusione sono vere, il ragionamento è scorretto, in quanto la verità della conclusione non segue affatto da quella delle premesse.

La logica si occupa di forme logiche come la (**) e la (***), le quali sono espresse in un linguaggio artificiale che ha la caratteristica di prescindere in larghissima misura[1] dai contenuti, e ciò è reso necessario dall'obiettivo di evidenziare il nesso di conseguenza logica. Se si considera che, in senso lato, una teoria è un linguaggio mediante il quale si fanno affermazioni relative ad un dato universo di oggetti, si può dire, in prima approssimazione, che l'universo $\mathcal{U}$ della logica è costituito dalla classe delle forme logiche espresse in un linguaggio simbolico $\mathcal{L}$ esattamente definito, e l'obiettivo prevalente è quello di determinare le forme logiche corrette relativamente ad un concetto rigorosamente definito di conseguenza logica[2].

L'uso di un linguaggio che impiega numerosi simboli ha fatto sì che la logica sia stata sovente accompagnata dall'attributo *simbolica*. Tale termine è ora caduto in disuso poiché sottolinea un aspetto concettualmente meno significativo dell'indagine logica. *Formalizzazione* e *simbolizzazione* sono due concetti diversi. Un sistema di simboli è introdotto per ottenere maggiore chiarezza, precisione o concisione (ad esempio, la stenografia, la segnaletica stradale, il linguaggio algebrico), ma conserva quasi sempre il suo contenuto. Formalizzare, invece, significa *prescindere dai contenuti* e ciò non richiede necessariamente l'uso di una simbolizzazione, anche se questa costituisce uno strumento che facilita enormemente l'indagine di tipo formale.

Inoltre, lo scopo della logica non è tanto quello di elencare le forme corrette di ragionamento, ma soprattutto, come vedremo nel seguito di queste lezioni, quello di ricondurle ad un numero esiguo di forme molto elementari. Come in matematica un gran numero di teoremi discende da un numero ristretto di assiomi scelti inizialmente, così in logica si cerca di scomporre i ragionamenti complessi in una serie di passi elementari esplicitamente definiti. Anche la logica, quindi, si struttura deduttivamente come molte altre teorie scientifiche, e questa è una delle ragioni per le quali essa è molto spesso accompagnata dall'attributo *matematica*, da intendersi *logica presentata con metodo matematico*[3]. La logica ha avuto come campo di applicazione privilegiato proprio la matematica. Tuttavia, è bene tener presente che la logica si applica in tutte le teorie nelle quali, oltre alle proposizioni ammesse in forza dei criteri propri della teoria stessa, si accettano quelle che ne sono conseguenza logica. È proprio il carattere *formale* della logica, ossia il prescindere dalle caratteristiche dei singoli universi di discorso, che conferisce ad essa l'applicabilità nei contesti più svariati. In definitiva, formale, simbolica, matematica sono attributi che sono impiegati per una ragione ben precisa e plausibile[4].

[1] Il prescindere dai contenuti non è completo, in quanto le molteplici interpretazioni, come si vedrà in dettaglio in seguito, devono sottostare a determinati vincoli: certe lettere vanno interpretate in individui, altre in proprietà, altre in relazioni e, inoltre, alcuni simboli (i simboli logici, quali, ad esempio, $\to$ e $\forall$) hanno una interpretazione prefissata.

[2] In effetti, sono possibili varie caratterizzazioni del concetto di conseguenza logica e, quindi, varie logiche. L'esistenza di una pluralità di logiche è uno dei caratteri più vistosi delle ricerche condotte nel ventesimo secolo.

[3] La locuzione "logica matematica" può anche avere il significato di *logica della matematica*, per sottolineare la stretta dipendenza dell'indagine logica da quella condotta nelle scienze matematiche. Le vicende della matematica ottocentesca hanno gradatamente messo in luce che il nesso di conseguenza logica è centrale in matematica, in quanto è quello che lega i teoremi agli assiomi delle teorie matematiche.

[4] Viene talvolta impiegato anche l'attributo *filosofica*, in genere contrapposto a matematica, per sottolineare la pertinenza (di una parte) dell'indagine logica con la filosofia, nel senso che la logica è uno strumento con il quale si affrontano problemi che, tradizionalmente, sono stati oggetto di interesse della filosofia. In tutta la storia della filosofia si è discusso se la logica fosse o no parte della filosofia e, parallelamente agli sviluppi tecnici più recenti, si è dibattuto se la logica fosse o no parte della matematica. A noi piace sostenere che la logica sia una disciplina autonoma, in quanto studia un universo che le è proprio, e poiché lo studia con strumenti formali ha

I diversi livelli e ambiti logici

Si è detto in precedenza che una teoria è essenzialmente una coppia $T = \langle \mathcal{L}, \mathcal{U} \rangle$, costituita da un linguaggio $\mathcal{L}$ mediante il quale si esprimono le proposizioni vere relative ad un universo oggettuale $\mathcal{U}$. L'indagine su una teoria si sviluppa in una nuova teoria MT, detta *metateoria*, che assume come universo di indagine il linguaggio $\mathcal{L}$ della teoria oggetto e che, a sua volta, si servirà di un linguaggio $\mathcal{L}_{MT}$, detto *metalinguaggio* (ovvero $MT = \langle \mathcal{L}_{MT}, \mathcal{L} \rangle$[5]). La metateoria si divide in due componenti: la *sintassi*, nella quale le proprietà di $\mathcal{L}$ vengono indagate senza tener conto del fatto che $\mathcal{L}$ è il linguaggio delle teoria T, e la *semantica*, nella quale si studiano le proprietà di $\mathcal{L}$ in funzione del rapporto fra $\mathcal{L}$ e $\mathcal{U}$. Si è accennato al fatto che, nel caso della logica, l'universo $\mathcal{U}$ è costituito, almeno in prima approssimazione, dalle forme corrette di ragionamento e che il linguaggio $\mathcal{L}$ conterrà dei simboli quali a, b, R, S, $\forall$, $\rightarrow$. La sintassi, quindi, si occuperà di studiare le proprietà del linguaggio artificiale $\mathcal{L}$ che consente di esprimere le forme dei ragionamenti; la semantica, invece, avrà come ingrediente principale il nesso di conseguenza logica (mediante il quale si esprime, come si è detto, la correttezza dei ragionamenti).

La prima ipotesi fondamentale è il *principio di bivalenza* in base al quale ogni proposizione è vera o falsa (e non entrambe le cose), ossia ha, come si usa dire, valore di verità **V** o **F**[6].

La seconda ipotesi è il *principio di vero-funzionalità*. Distinguiamo le proposizioni in semplici e composte. Le proposizioni *semplici* (o *atomiche*) sono quelle che non contengono al loro interno parti che, a loro volta, costituiscono delle proposizioni. In caso contrario le proposizioni sono dette *composte*. Ad esempio, tutte le proposizioni che abbiamo incontrato nei ragionamenti degli Esempi (1)-(5) del paragrafo precedente sono semplici.

Sono esempi di proposizioni composte le seguenti: "2 è minore di 5 e 5 è maggiore di 2", "Se Aldo è il nipote di Mario, allora Mario è lo zio di Aldo", "3 non è minore di 7", "Se piove andiamo in automobile, ma, se non piove, andiamo a piedi", "5 è pari oppure è dispari", "8 è pari se e solo se 9 è dispari", "La retta r è incidente o parallela alla retta sl"; e così via.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ introdurremo dei simboli per denotare le proposizioni semplici e altri simboli per denotare alcuni connettivi mediante i quali si ottengono proposizioni composte a partire da proposizioni semplici. Ebbene, noi considereremo solo *connettivi vero-funzionali*, vale a dire con-

---

una metodologia non dissimile da quella della matematica (che è la scienza del "formale"): quindi la logica è sostanzialmente logica matematica (nel senso di logica trattata matematicamente). Ciò non significa che la logica matematica esaurisca completamente l'orizzonte della disciplina; infatti, dato che gli universi del "ragionamento" sono molteplici e ciascuno ha caratteristiche peculiari, per molti di essi non si è ancora individuato un nesso adeguato di conseguenza logica e una soddisfacente formalizzazione mediante un corpus definito di regole formali corrette. Si può sostenere che un settore della logica divenga di "logica matematica" quando ha raggiunto un adeguato livello di maturazione e si può proporre come modello (formale) dell'attività deduttiva in un determinato ambito teorico. Ciò è quanto si è verificato per molte logiche intensionali (quali la logica modale, la logica deontica, la lofgica epistemica, ecc.) che sono state recentemente formalizzate in modo soddisfacente.

[5] Di solito il metalinguaggio $\mathcal{L}_{MT}$ è la lingua italiana arricchita da un certo numero di simboli per denotare gli elementi (simboli, formule, ecc.) di $\mathcal{L}$. È assai comune l'uso *autonimo* dei segni, che anche noi adotteremo: per evitare di introdurre troppi nuovi simboli, nel metalinguaggio i simboli del linguaggio (ad esempio a, b, $\rightarrow$, $\forall$) assumono il ruolo di nomi di loro stessi. È la distinzione tra *uso* e *menzione*: in $\mathcal{L}$ un simbolo viene usato, in $\mathcal{L}_{MT}$ viene menzionato (alcuni autori usano simboli diversi in $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_{MT}$, altri usano in $\mathcal{L}_{MT}$ le virgolette per menzionare i simboli e gli elementi di $\mathcal{L}$). È tuttavia sempre chiaro dal contesto se si sta operando in $\mathcal{L}$, o se si è nella metateoria, cioè in $\mathcal{L}_{MT}$, e quindi l'uso autonimo dei segni non comporta particolari pericoli di fraintendimento. Un aspetto solo indirettamente collegato con questo è il seguente: si è detto che lo studio della logica (cioè la metateoria) è condotta con metodo matematico; ciò significa, tra l'altro, che dovremo presentare varie dimostrazioni. Orbene, in queste dimostrazioni faremo uso di ragionamenti condotti mediante quelle stesse regole che sono oggetto di indagine nell'ambito della logica come teoria. Si crea quindi una circolarità: per ragionare si usa la logica e, quindi, per ragionare sulla logica si usa la logica. Per spezzare tale circolo basta distinguere il livello teorico da quello metateorico: in quest'ultimo si usa in modo informale la "logica del buon senso", che è quella che viene formalizzata al livello teorico. Se lo scopo dell'indagine fosse solo quello di elencare delle forme corrette di ragionamento e per dimostrarne la correttezza ci dovessimo servire delle corrispondenti forme di ragionamento nella logica del linguaggio comune, evidentemente il circolo sarebbe vizioso. In realtà, come si è accennato, gli scopi sono altri, e saranno evidenziati man mano che si andrà avanti nello studio della logica.

[6] Esistono svariati sistemi logici nei quali non si assume la validità di tale principio; tra di essi vi sono le *logiche polivalenti*, le *logiche probabilistiche*, le *logiche fuzzy*, ecc., nelle quali il valore di verità di una proposizione può assumere svariati valori. Vi sono poi altre logiche nelle quali non a tutte le proposizioni si assegna un valore di verità.

nettivi tali che il valore di verità delle proposizioni composte ottenute tramite essi dipende solo dai (è funzione dei) valori di verità delle proposizioni componenti.

Un altro genere di considerazioni riguarda la scelta degli ingredienti del linguaggio $\mathcal{L}$ in funzione del grado di approfondimento del lavoro di formalizzazione che si intende operare nei confronti del linguaggio naturale.

Consideriamo il seguente ragionamento:

> Andrò in vacanza in aereo o in automobile. Se andrò in aereo giungerò prima a destinazione, e non potrò portare molte valigie. Se andrò in automobile potrò portare molte valigie. Se avrò una vacanza confortevole, allora avrò portato molte valigie. Quindi, se avrò una vacanza confortevole, allora sarò andato in automobile.

In esso figurano alcune proposizioni composte. Indichiamo con lettere le proposizioni semplici:

p	$=$	andrò in vacanza in aereo
q	$=$	andrò in vacanza in automobile
r	$=$	giungerò prima a destinazione
s	$=$	potrò portare molte valigie
t	$=$	avrò una vacanza confortevole

Si perviene allora alla seguente formalizzazione:

$$\begin{array}{l} p \text{ o } q \\ \text{se } p \text{ allora } (r \text{ e non } s) \\ \text{se } q \text{ allora } s \\ \text{se } t \text{ allora } s \\ \hline \text{se } t \text{ allora } q \end{array}$$

Per convincerci che il ragionamento è corretto, procediamo come segue. Supponiamo, per assurdo, che le premesse siano vere e la conclusione falsa. Se la conclusione è falsa allora t è vera e q è falsa (avrò una vacanza confortevole senza essere andato in auto). Dall'ultima premessa, essendo t vera, risulta vera anche s (se avrò una vacanza confortevole, allora avrò portato molte valigie). Dalla prima premessa, essendo q falsa, segue che è vera p, e allora dalla seconda premessa segue che è vera la negazione di s, cioè che s è falsa, in contraddizione con quanto prima ottenuto[7].

Non è importante ora soffermarci su questa giustificazione – anzi, nel seguito, la giustificazione della correttezza dei ragionamenti sarà condotta con tecniche più precise e sofisticate – quanto sottolineare il fatto che la correttezza è stata stabilita senza far intervenire i "contenuti" delle proposizioni semplici p, q, r, s e t. Si tratta di una giustificazione a livello proposizionale, in quanto si basa solo sui nessi che sussistono tra le proposizioni semplici nelle proposizioni composte assunte come premesse e nella conclusione. Ebbene, nella *logica proposizionale* si esaminano solo ragionamenti che ammettono questo tipo di giustificazione e nel cui linguaggio sono presenti soltanto lettere per proposizioni semplici e simboli per connettivi vero-funzionali.

Se consideriamo un altro degli esempi incontrati in precedenza:

$$\begin{array}{l} \textit{Napoleone è genovese} \\ \textit{Tutti i genovesi sono cinesi} \\ \hline \textit{Napoleone è cinese} \end{array}$$

si può osservare che, per giustificare il nesso di conseguenza logica, occorre considerare i contenuti delle tre proposizioni (tutte semplici) coinvolte. La correttezza del ragionamento non può essere stabilita al livello proposizionale, ma bisogna operare una formalizzazione più fine rispetto a quella dell'esempio precedente, cosa che peraltro abbiamo già anticipato nella (***). Si passa allora alla *logica dei predicati del primo ordine* nel cui linguaggio, che indicheremo con $\mathcal{L}'$, si hanno

[7] Si osservi che la terza premessa è irrilevante ai fini del sussistere del nesso di conseguenza logica, come pure è inessenziale il ruolo della proposizione r (il ragionamento è ridondante).

a disposizione, tra l'altro, oltre ai simboli per i connettivi vero-funzionali, costanti e variabili individuali e costanti per proprietà e relazioni (costanti predicative), e i simboli per i quantificatori logici $\forall$ (per ogni) e $\exists$ (esiste) per individui, in modo da poter esplicitare la forma logica interna delle proposizioni semplici.

Consideriamo ora il seguente ragionamento corretto:

$$\frac{\textit{Carlo corre lentamente}}{\textit{Carlo corre}}$$

Nell'ambito della logica dei predicati del primo ordine "correre lentamente" e "correre" esprimono due distinte proprietà; se le indichiamo rispettivamente con P e Q si perviene alla seguente formalizzazione:

$$\frac{Pa}{Qa}$$

nella quale non risulta evidenziato il nesso di conseguenza logica (il fatto che un certo individuo abbia una certa proprietà non implica che ne abbia una certa altra non collegata alla prima). Evidentemente ciò deriva dal fatto che la formalizzazione fa sparire lo stretto legame fra P e Q. Una formalizzazione più adeguata si ottiene osservando che l'avverbio "lentamente", in realtà, indica una proprietà non di Carlo, ma del "correre", e appare pertanto più naturale "tradurlo" con una proprietà P del correre (Q); indicando con $P(Q)$ la proprietà "correre lentamente", si può allora scrivere:

$$\frac{P(Q)a}{Qa}$$

nella quale è reso esplicito il nesso di conseguenza logica. Vi è il modo, almeno in casi come questo, di evitare di ricorrere a proprietà di proprietà, restando così nell'ambito della logica del primo ordine; basta sancire che il correre lentamente implica il correre e introdurre una nuova premessa:

$$\frac{\begin{array}{l} Pa \\ \forall x(Px \to Qx) \end{array}}{Qa}$$

Il passaggio ad una logica di ordine superiore al primo è necessario quando si considerano proprietà e relazioni variabili, e si quantifica su di esse. Se affermiamo, ad esempio:

Ogni individuo ha almeno una proprietà

per ottenere una formalizzazione si deve disporre di una variabile X per proprietà (distinta dalla variabile x per individui):

$$\forall x \exists X(Xx)$$

Come esempio più significativo di proposizione che si formalizza al secondo ordine consideriamo il principio di induzione matematica, che si enuncia solitamente nel modo seguente:

> *Se una proprietà vale per il numero 0 e, quando vale per un numero, vale per il successivo di quel numero, allora la proprietà vale per tutti i numeri naturali.*

Per formalizzarla occorre osservare che tale principio si riferisce non ad una proprietà in particolare, ma ad ogni proprietà, per cui una sua formalizzazione sarà del tipo[8]:

$$\forall X((X0 \wedge \forall x(Xx \to Xx')) \to \forall x Xx)$$

[8] $\wedge$ indica la congiunzione logica, x' il successore di x e 0 lo zero.

Se si hanno a disposizione simboli per predicati di predicati e variabili per predicati che possono essere quantificate si ha il linguaggio $\mathcal{L}''$ della logica del secondo ordine. D'altra parte è ovvio che il procedimento si può iterare indefinitamente, considerando predicati di predicati di predicati, variabili per predicati di predicati e così via. Come vedremo, già al livello del secondo ordine si incontrano alcuni notevoli problemi, che suggeriscono di sfruttare al meglio le potenzialità della logica dei predicati del primo ordine, cercando di evitare il passaggio agli ordini successivi. Di fatto si riesce a formalizzare gran parte dei ragionamenti abituali nell'ambito della logica del primo ordine.

Consideriamo infine il seguente ragionamento:

$$\frac{\textit{Carlo sta correndo}}{\textit{Carlo avrà corso}}$$

Siamo in presenza di un ragionamento corretto: se adesso Carlo corre, sarà vero nel futuro che Carlo ha corso in un istante passato. La sua formalizzazione fuoriesce dalle possibilità dei linguaggi fin qui introdotti, poiché non si è specificato un modo per rappresentare i tempi dei verbi[9]. Abbiamo così un esempio di un ragionamento di fronte al quale la *logica classica* (che comprende appunto la logica proposizionale e le logiche dei predicati) si rivela inadeguata. D'altra parte gli aspetti temporali sono assenti dalla gran parte dell'attività deduttiva, ad esempio da quella che si svolge in ambito matematico. Inoltre, come si è detto, i sistemi logici che esamineremo in questo corso sono alla base delle successive estensioni per formalizzare ambiti più ampi del ragionamento condotto nei linguaggi naturali.

Breve excursus storico

Proseguiamo questo capitolo introduttivo con un brevissimo panorama storico delle tappe più significative della logica e dell'opera dei principali studiosi che verranno menzionati in questo testo.

Lo studio della logica come disciplina formale che si occupa del corretto dedurre è presente già in ARISTOTELE, universalmente riconosciuto come il "padre della logica". Ad Aristotele si deve la notissima teoria del sillogismo, cioè l'analisi di alcune forme particolari di ragionamento (quali: "se tutti i greci sono uomini e tutti gli uomini sono mortali, allora tutti i greci sono mortali"). Pur essendo intesa da Aristotele come una teoria generale dell'inferenza, la teoria del sillogismo è, in effetti, solo un frammento della logica dei predicati del primo ordine (in essa intervengono solo predicati monadici, ossia simboli per proprietà). Sempre nell'ambito del pensiero greco, ai filosofi delle *scuole megarica* e *stoica* si deve un primo sviluppo della teoria dei connettivi logici, cioè di quei termini del linguaggio quali "non", "e", "o", "se...,allora..." mediante i quali si costruiscono proposizioni composte partendo da proposizioni semplici, e quindi si possono rintracciare i primi elementi della logica proposizionale.

Tralasciando i contributi dei logici medioevali, la cui importanza è stata riconosciuta solo in epoca assai recente e che sono oggetto di un'attenta rivalutazione, è doveroso almeno menzionare la figura di GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716), il quale ha anticipato le idee fondamentali degli sviluppi più recenti della logica, vale a dire la costruzione di un linguaggio simbolico universale (*characteristica universalis*) e l'elaborazione di un calcolo (*calculus ratiocinator*) che, consentendo la meccanizzazione di tutti i tipi di ragionamento (*ars combinatoria*), potesse dirimere tutte le questioni .

L'anno di nascita della logica matematica è generalmente considerato il 1847, anno in cui sono state pubblicate la *Formal Logic* di AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871) e, soprattutto, *The Mathematical Analysis of Logic* di GEORGE BOOLE (1815-1864). De Morgan e Boole, unitamente a illustri seguaci tra i quali CHARLES S. PEIRCE (1839-1914) e ERNST SCHRÖDER (1841-1902), svilupparono la logica alla stregua di una disciplina matematica, come un vero e proprio calcolo

[9]Esiste un settore della logica, la cosiddetta *logica temporale*, nel quale si formalizzano ragionamenti quale quello ora proposto.

algebrico[10]. L'algebrizzazione della logica, pur costituendo un passo di fondamentale importanza, non si è rivelato ancora sufficiente per l'elaborazione di veri e propri calcoli logici; è stato necessario un ribaltamento di prospettiva: non più la logica trattata come disciplina matematica, ma la logica al servizio della matematica.

Questo decisivo passo in avanti è stato compiuto dal matematico italiano GIUSEPPE PEANO (1858-1932) e dalla sua scuola che, con l'intento primario di rendere completamente rigorose le dimostrazioni matematiche, ha condotto un'analisi serrata del linguaggio della matematica, traducendolo in simboli e cercando di esplicitare i procedimenti con i quali si ottengono i teoremi. È nell'ambito della scuola di Peano che sono stati esplicitati i nuovi canoni dell'assiomatica, in base ai quali: a) gli assiomi sono considerati a prescindere da ogni riferimento ad un contenuto esterno, non più proposizioni evidenti, ma suscettibili di molteplici interpretazioni; b) i concetti primitivi hanno un significato che dipende solo da quanto espresso negli assiomi, i quali vengono a costituire una sorta di definizione implicita dei concetti stessi. Si è venuto quindi gradualmente affermando un nuovo modo di intendere l'attività matematica, il quale ha comportato la nascita di tutta una nuova serie di problematiche relative alla coerenza, all'indipendenza, alla completezza dei sistemi di assiomi e l'esigenza di esplicitare l'apparato deduttivo delle teorie matematiche e ha condotto, come vedremo fra breve, alla elaborazione dei primi calcoli logici veri e propri.

Il ribaltamento concettuale nei confronti della matematica era stato già condotto fino alle sue estreme conseguenze da GOTTLOB FREGE (1848-1925) il quale, nella sua *Begriffsschrift* (*Ideografia*) del 1879, aveva introdotto gli strumenti per una perfetta deduzione formale, assicurata dall'uso di uno strumento simbolico e da un'analisi dei concetti (fondata sul concetto di funzione e di argomento) risultata decisiva per la creazione dei calcoli logici. Tuttavia, Frege aveva un obiettivo che andava ben oltre alla ricostruzione rigorosa delle dimostrazioni matematiche: secondo il filosofo tedesco la logica doveva fornire il fondamento stesso della matematica, nel senso che i concetti matematici avrebbero dovuto essere ridotti a concetti di pura logica[11]. Il programma "logicista" di Frege fu completamente ridimensionato dalla scoperta, nel 1902, da parte di BERTRAND RUSSELL (1872-1970), di una antinomia[12]. Questa fase, divenuta nota con il nome di "crisi dei fondamenti della matematica", fu il punto di avvio di una serie imponente di ricerche. Da un lato, lo stesso Russell riprese il programma logicista fregeano e pervenne alla pubblicazione (con ALFRED NORTH WHITEHEAD (1861-1947)) dei tre volumi dei *Principia Mathematica* (1910-13), opera che aveva l'obiettivo di mostrare come la matematica fosse ricavabile soltanto da principi logici (la logica era intesa come calcolo delle proposizioni e dei predicati di ordine qualsiasi – la cosiddetta teoria dei tipi – e di regole atte a evitare le antinomie). D'altro lato, DAVID HILBERT (1862-1943), al Congresso dei Matematici di Parigi del 1900, aveva posto in risalto il problema della dimostrazione di non contraddittorietà dell'analisi matematica e in seguito, negli anni venti, fu

[10] Diamo un'idea di cosa ciò significhi. L'equazione yx = x (che si può leggere insiemisticamente "l'intersezione di y e di x è x" ed equivale a "x è contenuto in y") si può intendere come "tutti gli x sono y". Quindi, ad esempio, "tutti i greci sono uomini" e "tutti gli uomini sono mortali", si esprimono con xy = y e zx = x (x = uomo, y = greco; z = mortale); ma da queste due equazioni, con semplici sostituzioni algebriche, si ottiene zy = y (ossia "tutti i greci sono mortali"). Infatti, da zx = x, moltiplicando ambo i membri per y, si ha zxy = xy, e sostituendo in entrambi i membri xy con y (dato che xy = y), si perviene a zy = y. Una deduzione, quindi, assume la forma di una trasformazione di equazioni. L'aspetto fondamentale del calcolo di Boole era la sua duplice interpretazione come calcolo delle classi e come calcolo delle proposizioni. Furono Peirce e Schröder che ampliarono le potenzialità del calcolo booleano introducendovi i quantificatori (anche di ordine superiore).

[11] Nel secolo scorso, il programma riduzionista aveva ricondotto la teoria dei numeri reali, e quindi l'analisi matematica, alla teoria dei numeri naturali ed ad alcuni elementi della teoria delle classi. Si trattava quindi di ridurre il concetto di numero naturale a pure nozioni logiche. Frege cercò di realizzare questo progetto logicista dapprima con *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) e poi nei due volumi *Die Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903).

[12] Questa antinomia andava ad aggiungersi a quelle che erano state scoperte nell'ambito della teoria degli insiemi di GEORG CANTOR (1845-1918). L'antinomia di Russell si può, in breve, così formulare. Sia N l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi (interviene qui uno dei principi della teoria degli insiemi, il *principio di comprensione*, in base al quale l'estensione di ogni predicato è un insieme; quindi il predicato "non appartenere a se stesso" determina un insieme, appunto l'insieme degli insiemi che non appartengono a se stessi). Se si suppone che N appartiene a N, allora è un insieme che non appartiene a se stesso, e quindi N non appartiene a N. Viceversa, se N non appartiene a N, allora appartiene all'insieme degli insiemi che non appartengono a se stessi, che è N, e quindi N appartiene a N. In definitiva N appartiene a N se e solo se N non appartiene a N, e questa è una contraddizione.

alla guida del programma “formalista”, che si poneva l’obiettivo di ridurre la matematica a sistemi formali e di dimostrarne la non contraddittorietà. Su un terzo fronte Luitzen E.J. Brouwer (1881-1966) si faceva portavoce di un modo radicalmente nuovo di intendere gli enti matematici: nella sua concezione, detta ”intuizionismo”, che intende privilegiare gli aspetti “costruttivi” dell’attività matematica, anche la logica subisce delle profonde trasformazioni (nella logica intuizionista, ad esempio, non valgono in generale il principio del terzo escluso e la legge della doppia negazione[13]). Le tre scuole fondazionali (logicismo, formalismo, intuizionismo) non riuscirono, per diverse ragioni, nel loro intento di fornire una base sicura e definitiva per la matematica.

Rimandando ai testi citati più avanti per gli approfondimenti di queste tematiche, a noi interessa solo sottolineare come nel 1921, Emil L. Post (1897-1954) pervenne ad una dimostrazione di completezza per il calcolo proposizionale e che, durante gli anni venti, Hilbert e i suoi collaboratori, tra i quali Wilhelm F. Ackermann (1896-1962), Paul Bernays (1888-1977) – e altri studiosi tra cui John von Neumann (1903- 1957) e Jacques Herbrand (1908-1931) – ottennero vari risultati di coerenza e di completezza di parti dell’aritmetica formalizzata al primo ordine, mentre, nel 1928, Hilbert e Ackermann pubblicarono il primo manuale di logica matematica in linea con le attuali impostazioni[14]. Nel 1930, Kurt Gödel (1906-1978) dimostrò la completezza del calcolo dei predicati del primo ordine[15] e l’anno seguente il celebre teorema di incompletezza, probabilmente il più importante risultato della logica matematica[16], che ha tra le sue conseguenze che è impossibile dimostrare la coerenza di un sistema abbastanza potente con metodi interni al sistema stesso e l’incompletezza della logica del secondo ordine (e di ordine superiore). Vanno almeno citati, inoltre, il contributo del 1915 di Leopold Löwenheim (1878-1957) il quale, seppur usando una logica che ammette formule di lunghezza infinita sulla scia dell’interpretazione dei quantificatori di Schröder[17], dimostra che ogni formula soddisfacibile è soddisfacibile in un dominio finito o numerabile, teorema che fu poi ripreso e adattato alla logica del primo ordine da Thoralf Skolem (1887-1962). Tutti gli studiosi finora citati hanno contribuito, chi più chi meno, alla configurazione attuale degli studi di logica matematica. La distinzione tra teoria e metateoria, tra sintassi e semantica, tra i vari livelli logici maturò lentamente in questo periodo; la gran parte degli studiosi (Frege, Peirce, Schröder, Peano, Russell, Löwenheim, Skolem) adottò una logica più ricca di quella del primo ordine: o almeno del secondo ordine, o infinitaria (con espressioni infinitamente lunghe). La logica del primo ordine emerse con il testo di Hilbert e Ackermann, con i lavori di Skolem in teoria degli insiemi, e soprattutto con i citati teoremi di completezza e di incompletezza di Gödel. Nel 1936 il logico polacco Alfred Tarski (1902-1983) presentò la definizione semantica di verità matematica che costituisce il coronamento di questa fase degli studi logici nella quale sono stati elaborati i concetti e le tecniche che fanno da supporto agli argomenti che affronteremo nel seguito.

Suggerimenti bibliografici

(A) Storia della logica:

I contributi di C. Mangione in L. Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, 7 Voll., Garzanti, Milano, 1972.

H. Scholz, *Storia della logica*, Laterza, Bari, 1983.

W., M. Kneale, *Storia della logica*, Einaudi, Torino, 1972.

J. Bochenski, *La logica formale*, 2 Voll., Einaudi, Torino, 1972.

R. Blanché, *La logica e la sua storia da Aristotele a Russell*, Ubaldini, Roma, 1973.

N.I. Stjazkin, *Storia della logica*, Editori Riuniti, Roma, 1980.

[13] La *logica intuizionista* è stata formalizzata negli anni trenta da Arend Heyting (1898-1980).

[14] D. Hilbert, W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin, 1928.

[15] K. Gödel, “Die Vollständigkeit der Axiome der logischen Funktionalkalküls”, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37 (1930), pp. 349-360; trad. it. nell’antologia a cura di E. Casari, citata nella bibliografia.

[16] Trad. it. in S.G. Shanker (a cura di), *Il teorema di Gödel. Una messa a fuoco*, Franco Muzzio, Padova, 1991.

[17] Secondo essa un quantificatore universale equivale a una congiunzione infinita e un quantificatore esistenziale a una disgiunzione infinita (anche più che numerabile).

C. Mangione, S. Bozzi, *Storia della logica. Da Boole ai giorni nostri*, Garzanti, Milano, 1993.
M. Mugnai (a cura di), *La logica da Leibniz a Frege*, Loescher, Torino, 1982.
E. Casari (a cura di), *La logica del novecento*, Loescher, Torino, 1981.
E. Casari (a cura di), *Dalla logica alla metalogica*, Sansoni, Firenze, 1979.
S. Maracchia, *Breve storia della logica antica*, Euroma-La Goliardica, Roma, 1987.
C. Mangione, M. Franchella, *Letture di Logica*, LED Edizioni, Milano, 1993.
M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Franco Angeli, Milano, 1985.
E. Moriconi, *La teoria della dimostrazione di Hilbert*, Bibliopolis, Napoli, 1987.
S.G. Shanker (a cura di), *Il teorema di Gödel.* Una messa a fuoco, Franco Muzzio, Padova, 1991.
G. Lolli, *Incompletezza. Saggio su Kurt Gödel*, Il Mulino, Bologna, 1992.

(B) Traduzioni italiane di opere originali:

G.W. Leibniz, *Scritti di logica*, 2 Voll., Laterza, Bari, 1992.
G. Boole, *Indagine sulle leggi del pensiero*, Einaudi, Torino, 1976.
C.S. Peirce, *Scritti di logica*, La Nuova Italia, Firenze, 1981.
G. Frege, *Logica e aritmetica*, Boringhieri, Torino, 1965.
G. Frege, *Alle origini della nuova logica*, Boringhieri, Torino, 1983.
G. Frege, *Scritti postumi*, Boringhieri, Torino, 1986.
G. Frege, *Ricerche logiche*, Guerini e Associati, Milano, 1988.
A.N. Whitehead, B. Russell, *Introduzione ai "Principia Mathematica"*, La Nuova Italia, Firenze, 1977.
D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, Bibliopolis, Napoli, 1985.
L.E.J. Brouwer, *Lezioni sull'intuizionismo*, Boringhieri, Torino, 1983.

(C) Introduzioni alle problematiche sulla natura della logica:

E. Agazzi (a cura di), *Logica matematica e logica filosofica*, La Scuola, Brescia, 1990.
E. Agazzi, *La logica simbolica*, La Scuola, Brescia, 1989.
AA.VV., *9 lezioni di logica*, Franco Muzzio, Padova, 1990.
M.L. Dalla Chiara, *Logica*, ISEDI, Milano, 1974.
Hao Wang, *Dalla matematica alla filosofia*, Boringhieri, Torino, 1984.
G. Lolli, *La macchina e le dimostrazioni*, Il Mulino, Bologna, 1987.
G. Lolli, *Cos'è la logica matematica*, Franco Muzzio, Padova, 1992.
F. Bellissima, P. Pagli, *La verità trasmessa. La logica attraverso le dimostrazioni matematiche*, Sansoni, Firenze, 1993.
G. Lolli, *Capire una dimostrazione*, Il Mulino, Bologna, 1988.
G. Lolli, *Capire la matematica*, Il Mulino, Bologna, 1996.

(D) Sul problema dei fondamenti della matematica:

E. Casari, *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano, 1963.
E. Casari (a cura di), *La filosofia della matematica del '900*, Sansoni, Firenze, 1973.
A. Cantini (a cura di), *I fondamenti della matematica*, Loescher, Torino, 1979.
C. Cellucci (a cura di), *La filosofia della matematica*, Laterza, Bari, 1967.
M. Borga, F. Furinghetti (a cura di), *Il problema dei fondamenti della matematica*, ECIG, Genova, 1986.
M. Borga, D. Palladino, *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia, 1997.

(E) Manuali di logica (dai più elementari ai più complessi):

E.J. Lemmon, *Elementi di logica*, Laterza, Bari, 1986.
W. Hodges, *Logica*, Garzanti, 1986.
I.M. Copi, C. Cohen, *Introduzione alla logica*, Il Mulino, Bologna 1997.
T.G. Bucher, *Introduzione alla logica*, CLUEB, Bologna, 1996.
M. Mondadori, M. D'Agostino, *Logica*, Bruno Mondadori, Milano, 1997.

E. Bencivenga, *Il primo libro di logica*, Boringhieri, Torino, 1984.
L. Magnani, R. Gennari, *Manuale di logica. Logica classica e del senso comune*, Guerini, Milano, 1997.
M. Borga, *Elementi di logica matematica*, Euroma-La Goliardica, Roma, 1984.
G. Lolli, *Introduzione alla logica formale*, Il Mulino, Bologna, 1991.
M. Negri, *Elementi di Logica*, Edizioni LED, Milano, 1994.
M. Borga, *Fondamenti di logica*, Angeli, Milano, 1995.
E. Mendelson, *Introduzione alla logica matematica*, Boringhieri, Torino, 1972.
J.R. Shoenfield, *Logica matematica*, Boringhieri, Torino, 1981.
E. Casari, *Lineamenti di logica matematica*, Feltrinelli, Milano, 1959.
E. Casari, *Introduzione alla logica*, UTET, Torino, 1997.
C. Toffolari, P. Cintioli, *Logica Matematica*, Mc Graw-Hill, Milano, 2000.

Parte I

La Logica Proposizionale

Capitolo 1

La Sintassi della Logica Proposizionale

1.1 I connettivi vero-funzionali

Nella logica proposizionale, come si è detto nella *Premessa*, si analizzano i ragionamenti nei quali sono coinvolte proposizioni composte mediante proposizioni semplici (senza analizzare i contenuti interni di queste ultime); le proposizioni composte sono ottenute dalle proposizioni semplici mediante *connettivi vero-funzionali*, vale a dire operatori su proposizioni che hanno la seguente proprietà: il valore di verità delle proposizioni composte ottenute tramite essi dipende solo dai (è funzione dei) valori di verità delle proposizioni componenti.

I connettivi si possono distinguere in base al numero di argomenti: quelli che si applicano a una sola proposizione sono detti *mono-argomentali*, quelli che si applicano a due proposizioni sono detti *bi-argomentali*, quelli che si applicano a tre proposizioni *tri-argomentali*, ..., in generale *n-argomentali* quelli che si applicano a n proposizioni[1].

Vi sono solo quattro possibili connettivi monoargomentali c_1, c_2, c_3 e c_4:

Tabella 1.1

A	$c_1(A)$	$c_2(A)$	$c_3(A)$	$c_4(A)$
V	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**F**

Solo c_3 è significativo (c_1 e c_4 hanno valore costante, indipendente dal valore di verità di A, mentre c_2 lascia invariato il valore di A): $c_3(A)$ ha valore opposto a quello di A. Dato che c_3 inverte il valore di verità, è detto *negazione*, e per esso si usa il simbolo $\neg$. Si ha quindi:

A	$\neg A$
V	**F**
F	**V**

Il simbolo $\neg$ si legge "non", poiché, nel linguaggio comune, è proprio tramite la negazione "non" che di solito si inverte il valore di verità di un enunciato.

Consideriamo ora i possibili connettivi vero-funzionali biargomentali. Essi sono 16. Se indichiamo con A e B i due argomenti e con c_1, ..., c_{16} i sedici connettivi, si ha la seguente tabella[2]:

[1] In base alla definizione di vero-funzionalità è indifferente considerare un connettivo come un operatore fra proposizioni (avente come argomento delle proposizioni e come valore una proposizione composta) o come una funzione avente sia come argomenti, sia come valori, i valori di verità **V** e **F**.

[2] Nelle tabelle, per brevità, scriviamo c_i anziché $c_i(A, B)$.

Tabella 1.1

A	B	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**

Se trascuriamo i connettivi che hanno un valore costante, indipendente da quelli di A e B (cioè c_1 e c_{16}), e quelli che si riducono ad A, o a B, o alle loro negazioni (c_4 e c_6 , c_{13} e c_{11}), restano dieci connettivi biargomentali significativi:

Tabella 1.1

A	B	c_2	c_3	c_5	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{12}	c_{14}	c_{15}
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**

Concentriamo ora la nostra attenzione sui primi cinque (i secondi cinque si possono ottenere dai primi attraverso la negazione: negando c_2 si ottiene c_{15}, negando c_3 si ottiene c_{14}, e così via).

• $c_2(A, B)$ ha valore di verità **V** quando almeno una delle due proposizioni A e B ha valore **V**, ed ha valore **F** quando entrambe A e B hanno valore **F**. $c_2(A, B)$ si dice *disgiunzione* o *alternativa* (*non esclusiva*) di A e di B (A e B sono i *disgiunti*); per comodità, anziché $c_2(A, B)$ scriviamo $A \vee B$, introducendo il simbolo $\vee$ per la disgiunzione. Tale simbolo si legge "o", poiché, nel linguaggio comune, per indicare che riteniamo vera una proposizione composta di due quando almeno una è vera, usiamo "o" o "oppure" nel senso di *vel*. Si ha allora la seguente tavola di verità per la disgiunzione:

A	B	$A \vee B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

• $c_8(A, B)$ ha valore di verità **V** quando A e B hanno entrambe valore **V**, e ha valore **F** in tutti gli altri casi, in cui almeno una tra A e B ha valore **F**. $c_8(A, B)$ si dice *congiunzione* di A e di B (A e B sono i *congiunti*); anziché $c_8(A, B)$ scriviamo $A \wedge B$, introducendo il simbolo $\wedge$ per la congiunzione. Il simbolo $\wedge$ si legge "e" poiché nel linguaggio comune, per asserire la verità simultanea di due proposizioni, si adopera proprio la congiunzione "e". La tavola di verità della congiunzione è quindi la seguente:

A	B	$A \wedge B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

• $c_5(A, B)$ ha valore di verità **F** solo quando A ha valore di verità **V** e B ha valore di verità **F**, e ha valore di verità **V** negli altri casi. $c_5(A, B)$ si dice *condizionale (materiale)* di *antecedente* A e *conseguente* B; anziché $c_5(A, B)$ scriviamo $A \to B$, introducendo il simbolo $\to$ per il condizionale materiale. Le precedenti condizioni di verità corrispondono a quelle impiegate nei ragionamenti matematici quando si afferma "se A, allora B" (o anche, equivalentemente, "A solo se B"): infatti, con tale proposizione si intende affermare che non può darsi il caso che l'antecedente A sia vero e il conseguente B falso. Si ha quindi la seguente tavola di verità per il condizionale:

A	B	$A \to B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

• Si osservi ora che $c_3(A, B)$ non è altro che il condizionale materiale di antecedente B e conseguente A (cioè $B \to A$), e quindi non corrisponde ad un connettivo concettualmente diverso dal precedente.

• $c_7(A, B)$ ha valore di verità **V** quando A e B hanno stesso valore di verità, e ha valore di verità **F** in caso contrario. $c_7(A, B)$ è il *bicondizionale* di A e B e si indica $A \leftrightarrow B$, introducendo il simbolo $\leftrightarrow$ che si legge "se e solo se"; la corrispondente tavola di verità è la seguente:

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Osservazione 1. Prima di proseguire nella nostra panoramica dei connettivi vero-funzionali, osserviamo che $A \leftrightarrow B$, come definito dalla precedente tavola di verità, equivale a $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Infatti, se calcoliamo il valore di verità di quest'ultima espressione in funzione dei valori di verità di A e di B servendoci delle tavole di verità precedenti relative a $\wedge$ e $\to$, si ottiene facilmente:

A	B	$(A \to B)$	$\wedge$	$(B \to A)$
V	**V**	V	**V**	V
V	**F**	F	**F**	V
F	**V**	V	**F**	F
F	**F**	V	**V**	V

che corrisponde a $A \leftrightarrow B$. Il bicondizionale è un connettivo vero-funzionale biargomentale che può essere definito servendosi dei due connettivi vero-funzionali $\wedge$ e $\to$. Non è quindi necessario introdurre nuovi simboli per tutti i nuovi connettivi: come è usuale nello sviluppo delle teorie scientifiche, assunti alcuni concetti come primitivi, gli altri si introducono mediante definizioni. Nel § 1.3, ad esempio, quando introdurremo il linguaggio per la logica proposizionale, non assumeremo come simbolo primitivo dell'alfabeto il simbolo $\leftrightarrow$ per il bicondizionale; lo introdurremo invece come simbolo definito:

$$\boxed{A \leftrightarrow B \text{ equivale a } (A \to B) \wedge (B \to A)}$$

Osservazione 2. Allo stesso modo si può osservare che, se calcoliamo il valore dell'espressione $(\neg A) \vee B$ in funzione dei valori di A e B, si trova:

A	B	$(\neg A)$	$\vee$	B
V	**V**	F	**V**	V
V	**F**	F	**F**	F
F	**V**	V	**V**	V
F	**F**	V	**V**	F

ossia si ottiene la stessa funzione di verità di $A \to B$. Si può quindi affermare che il condizionale materiale di due proposizioni A e B ha lo stesso significato di $(\neg A) \vee B$ e, come osservato in precedenza a proposito del bicondizionale, potremmo evitare di introdurre come primitivo il simbolo $\to$, riconducendolo a $\neg$ e $\vee$. Scriviamo quindi:

$$\boxed{A \to B \text{ equivale a } (\neg A) \vee B}$$

Ritornando ora alla Tabella 1.1 dei dieci connettivi, si è già detto che i secondi cinque si possono ottenere come "negazioni" dei primi cinque. Consideriamo, ad esempio, $c_{10}(A, B)$. Esso ha valore **V** quando una e una sola delle proposizioni A e B ha valore **V**, ed ha valore **F** negli altri casi. In analogia a quanto finora affermato, si può constatare come $c_{10}(A, B)$ corrisponda alla *disgiunzione esclusiva*, a quella combinazione vero-funzionale che nel linguaggio comune esprimiamo con "o" o "oppure" nel senso di *aut*. Si potrebbe allora introdurre un nuovo simbolo, ad esempio $+$, tale che:

A	B	$A + B$
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

D'altra parte, come si è già osservato, non è necessario introdurre nuovi simboli. Con i connettivi già introdotti si può esprimere la disgiunzione esclusiva, in quanto:

$$\boxed{A + B \text{ equivale a } \neg(A \leftrightarrow B)}$$

o anche, per quanto prima visto nell'Osservazione 1, senza ricorrere al bicondizionale:

$$\boxed{A + B \text{ equivale a } \neg((A \to B) \wedge (B \to A))}$$

o ancora (Osservazione 2) senza ricorrere al condizionale:

$$\boxed{A + B \text{ equivale a } \neg(((\neg A) \vee B) \wedge ((\neg B) \vee A))}$$

Osservazione 3. Un metodo generale per esprimere un connettivo servendosi solo di $\neg$, $\wedge$, $\vee$ è il seguente. Si considerano le righe della tavola di verità in cui il connettivo ha valore **V** (nel caso di $+$, la seconda e la terza riga). Dato che nella seconda riga A ha valore **V** e B ha valore **F**, alla seconda riga facciamo corrispondere la congiunzione: $A \wedge (\neg B)$ (la quale è vera se e solo se A è vera e B è falsa). Poiché nella terza riga A ha valore **F** e B ha valore **V**, alla terza riga facciamo corrispondere la congiunzione: $(\neg A) \wedge B$ (la quale è vera se e solo se A è falsa e B è vera). Poiché la proposizione $A + B$ è vera se e solo se si verifica uno di questi due casi, possiamo esprimerla come alternativa tra le due congiunzioni. Quindi:

$$\boxed{A + B \text{ equivale a } (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)}$$

A titolo di verifica calcoliamo il valore della espressione a destra:

A	B	$(A$	$\wedge$	$(\neg B))$	$\vee$	$((\neg A)$	$\wedge$	$B)$
V	**V**	V	F	F	**F**	F	F	V
V	**F**	V	V	V	**V**	F	F	F
F	**V**	F	F	F	**V**	V	V	V
F	**F**	F	F	V	**F**	V	F	F

e, come si vede, si ottengono come risultati proprio i valori di $(A + B)$.

• Consideriamo ora $c_9(A, B)$. Esso ha valore **F** solo quando A e B sono entrambe vere, ed ha valore **V** negli altri tre casi. Questo connettivo viene detto "o incompatibile", in quanto nel linguaggio naturale usiamo talvolta "o" con questo significato (quando intendiamo sottolineare che due proposizioni non possono risultare entrambe vere[3]). Nella letteratura questo connettivo è noto come "funtore di Sheffer" e viene denotato con il simbolo $|$ (e ha una interessante proprietà sulla quale torneremo nel § 1.2). Quindi:

[3]Ad esempio, quando affermiamo "O si mangia, o si parla", oppure "O si sta attenti, o si prendono appunti", intendiamo sottolineare che è falso che le due proposizioni componenti possano essere entrambe vere; le due proposizioni sono vere quando si fa una delle due cose, ma anche quando non se ne fa nessuna delle due (quando sono entrambe false), poiché non si vuole sostenere che va sempre fatta una delle due cose (il che sarebbe assurdo), ma appunto che non vanno fatte entrambe.

A	B	$(A \mid B)$
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Con il procedimento prima illustrato nell'Osservazione 3 si ottiene che:

$$\boxed{A \mid B \text{ equivale a } (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))}$$

o anche, più semplicemente, ricordando quanto già detto in precedenza:

$$\boxed{A \mid B \text{ equivale a } \neg(A \wedge B)}$$

Osservazione 4. Nel membro di destra della penultima equivalenza abbiamo scritto un'alternativa fra tre membri; nel seguito useremo spesso congiunzioni e disgiunzioni multiple del tipo:

$$A \wedge B \wedge C \wedge D$$
$$A \vee B \vee C$$

che, in modo analogo alle addizioni o moltiplicazioni aritmetiche, vanno intese come associate a sinistra:

$$(((A \wedge B) \wedge C) \wedge D)$$
$$((A \vee B) \vee C)$$

In ogni caso non vi è pericolo di confusione in quanto $\wedge$ e $\vee$ godono della proprietà associativa e, quindi:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} (A \wedge (B \wedge C)) & \text{equivale a} & ((A \wedge B) \wedge C) \\ (A \vee (B \vee C)) & \text{equivale a} & ((A \vee B) \vee C) \end{array}}$$

In generale:

- una congiunzione di più membri ha valore di verità **V** se e solo se tutti i membri congiunti hanno valore di verità **V**;
- una disgiunzione di più membri ha valore di verità **V** se e solo se almeno un disgiunto ha valore di verità **V**.

• Per completare la nostra rassegna dei connettivi vero-funzionali biargomentali riportati nella Tabella 1.1, osserviamo che $c_{12}(A, B)$ e $c_{14}(A, B)$ corrispondono alle negazioni di $c_5(A, B)$ e di $c_3(A, B)$ (e quindi a $\neg(A \to B)$ e $\neg(B \to A)$).

• $c_{15}(A, B)$ ha valore **V** se e solo se A e B sono entrambe false; si tratta del connettivo che nel linguaggio comune è solitamente espresso da "né...,né...", che è simbolizzato da $\uparrow$ ed è il secondo "funtore di Sheffer":

A	B	$A \uparrow B$
V	**V**	**F**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Osserviamo che:

$$\boxed{A \uparrow B \text{ equivale a } \neg(A \vee B)}$$

(poiché $c_{15}(A, B)$ è la negazione di $c_2(A, B)$) ma anche, per quanto esposto in precedenza nell'Osservazione 3:

$$\boxed{A \uparrow B \text{ equivale a } (\neg A) \wedge (\neg B)}$$

Quindi il connettivo $\uparrow$ può essere definito a partire dalla disgiunzione e dalla negazione o dalla congiunzione e dalla negazione. Dal confronto delle due ultime equivalenze segue che:

$$\boxed{\neg(A \vee B) \text{ equivale a } (\neg A) \wedge (\neg B)}$$

e anche (negando ambo i membri e osservando che $\neg(\neg A)$ equivale ad A):

$$\boxed{(A \vee B) \text{ equivale a } \neg((\neg A) \wedge (\neg B))} \tag{1.1}$$

Allo stesso modo si verifica che:

$$\boxed{(A \wedge B) \text{ equivale a } \neg((\neg A) \vee (\neg B))} \tag{1.2}$$

(1.1) e (1.2) sono due relazioni molto importanti in quanto legano fra loro, tramite la negazione, i connettivi di congiunzione e di disgiunzione. Esse prendono il nome di *leggi di De Morgan.*

Riassumendo, in questo paragrafo abbiamo introdotto dei simboli per denotare alcuni connettivi vero-funzionali:

- il simbolo $\neg$ per il connettivo mono-argomentale (funzione da $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ in $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$) di negazione:

A	$\neg A$
V	**F**
F	**V**

- i simboli $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $+$, $\mid$, $\uparrow$ per alcuni connettivi biargomentali (funzioni da $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^2$ in $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$, cioè funzioni che ad ogni coppia di valori di verità associano un valore di verità):

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A + B$	$A \mid B$	$A \uparrow B$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**

1.2 Basi di connettivi

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato alcuni connettivi vero-funzionali ed abbiamo visto come tra di essi, considerati come funzioni tra valori di verità, sussistano delle relazioni. In questo paragrafo esaminiamo più sistematicamente tali rapporti osservando come un numero assai piccolo di connettivi vero-funzionali consente di definire tutti gli altri.

Un qualsiasi connettivo n-argomentale è una funzione da $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^n$ in $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. Si ha che esso può essere definito mediante $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Questo fatto si enuncia dicendo che:

$$\{\neg, \wedge, \vee\} \textit{ è una base di connettivi}$$

dove una base di connettivi è un qualsiasi insieme di connettivi che consente di definire tutti gli altri.

La dimostrazione, che non presentiamo nei dettagli, si fonda sul metodo già illustrato nell'Osservazione 3 del paragrafo precedente e che riprendiamo con un esempio. Consideriamo il connettivo triargomentale Ω che vale **V** quando almeno due degli argomenti hanno valore **V**; la sua tavola è la seguente:

A	B	C	$\Omega(A,B,C)$
V	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**

Si considerano le righe in cui Ω ha valore **V** e, per ciascuna di esse, si scrive una congiunzione i cui congiunti sono o A, B, C o le loro negazioni a seconda se nella riga, sotto la lettera, vi è **V** o **F**; quindi:

Prima riga:	$A \wedge B \wedge C$
Seconda riga:	$A \wedge B \wedge (\neg C)$
Terza riga:	$A \wedge (\neg B) \wedge C$
Quinta riga:	$(\neg A) \wedge B \wedge C$

La disgiunzione delle congiunzioni così ottenute equivale, nel senso già chiarito in precedenza, al connettivo dato:

$$\boxed{\Omega(A,B,C) \text{ equivale a } (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee (A \wedge (\neg B) \wedge C) \vee ((\neg A) \wedge B \wedge C)}$$

È evidente che questo procedimento si può applicare in generale ad un qualsiasi connettivo con un numero qualsiasi di argomenti.

Osservazione 1. Il risultato vale anche se in tutte le righe compare **F**. Ad esempio, per il connettivo triargomentale che ha sempre valore **F** si può assumere la seguente disgiunzione che ha sempre valore **F**:

$$(A \wedge (\neg A)) \vee (B \wedge (\neg B)) \vee (C \wedge (\neg C))$$

(abbiamo usato tre lettere per rispettare il numero di argomenti). Anche i connettivi c_1, c_4, c_6, c_{11}, c_{13}, e c_{16} della Tabella 1.1, che non abbiamo riportato nella Tabella 1.1 , possono essere ricondotti a $\neg$, $\wedge$, $\vee$ con il procedimento illustrato. Ad esempio:

$$\boxed{\begin{array}{lll} c_4(A,B) & \text{equivale a} & (A \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)) \\ c_{11}(A,B) & \text{equivale a} & (A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)) \end{array}}$$

Osservazione 2. Il risultato ottenuto è molto significativo. Si è detto che nella logica proposizionale si vogliono studiare i nessi di conseguenza logica che coinvolgono proposizioni composte ottenute mediante connettivi vero-funzionali a partire da proposizioni semplici. Quanto abbiamo appena stabilito è che, mediante i tre soli connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, è possibile esprimere un qualsiasi connettivo vero-funzionale. In altri termini, siamo in grado di dominare in modo esaustivo l'ambito della vero-funzionalità.

Una volta dimostrato che $\{\neg, \wedge, \vee\}$ è una base di connettivi, se ne possono ottenere facilmente altre. Dalla legge di De Morgan (1.1) segue che $\vee$ può essere definito a partire da $\neg$ e $\wedge$, quindi:

$$\{\neg, \wedge\} \textit{ è una base di connettivi}$$

Analogamente, dall'altra legge di De Morgan (1.2), segue che:

$$\{\neg, \vee\} \textit{ è una base di connettivi}$$

Consideriamo ora le due espressioni $\neg(A \to (\neg B))$ e $(\neg A) \to B$ e calcoliamone le tavole di verità:

A	B	$\neg$	$(A$	$\to$	$(\neg B))$	$(\neg A)$	$\to$	B
V	**V**	**V**	*V*	*F*	*F*	*F*	**V**	*V*
V	**F**	**F**	*V*	*V*	*V*	*F*	**V**	*F*
F	**V**	**F**	*F*	*V*	*F*	*V*	**V**	*V*
F	**F**	**F**	*F*	*V*	*V*	*V*	**F**	*F*

Si è verificato che:

$(A \wedge B)$	equivale a	$\neg(A \to (\neg B))$
$(A \vee B)$	equivale a	$((\neg A) \to B)$

e, quindi, che la congiunzione e la disgiunzione possono essere definite mediante la negazione e il condizionale. Pertanto:

$$\{\neg, \to\} \text{ è una base di connettivi}$$

In tutti gli esempi di basi di connettivi fin qui considerati figura la negazione $\neg$. La sua presenza è essenziale in quanto, ad esempio, $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ non è una base di connettivi. Infatti, tutti e quattro i connettivi biargomentali di questo insieme assumono valore **V** quando entrambi gli argomenti hanno valore **V**. È allora ovvio che, comunque si compongano le loro funzioni di verità, la funzione composta assumerà valore **V** quando i suoi argomenti ricevono valore **V**. Non si potrà quindi esprimere, in funzione di questi quattro connettivi, la funzione di verità di un connettivo (quale ad esempio $+$) che assume valore **F** quando i suoi argomenti ricevono valore **V**.

È interessante osservare che $\{|\}$ è una base di connettivi. Il funtore di Sheffer "o incompatibile", da solo, consente di definire tutti gli altri connettivi vero-funzionali. Infatti, se si calcolano i valori di:

$$(A \mid A) \text{ e di } (A \mid A) \mid (B \mid B)$$

si ottiene rispettivamente:

A	$A \mid A$
V	**F**
F	**V**

A	B	$(A \mid A)$	$\mid$	$(B \mid B)$
V	**V**	*F*	**V**	*F*
V	**F**	*F*	**V**	*V*
F	**V**	*V*	**V**	*F*
F	**F**	*V*	**F**	*V*

e quindi:

$\neg A$	equivale a	$(A \mid A)$
$A \vee B$	equivale a	$(A \mid A) \mid (B \mid B)$

Ciò significa che $\neg$ e $\vee$ si possono definire tramite $|$, e, quindi, poiché $\{\neg, \vee\}$ è una base, anche $\{|\}$ è una base.

Anche $\{\uparrow\}$ è una base di connettivi. Si verifica infatti che:

$\neg A$	equivale a	$(A \uparrow A)$
$A \wedge B$	equivale a	$(A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$

e, essendo $\{\neg, \wedge\}$ una base, lo è anche $\{\uparrow\}$.

1.3 La sintassi della logica proposizionale

Abbiamo ora a disposizione gli ingredienti necessari per iniziare lo sviluppo organico della logica proposizionale, partendo dalla definizione del suo linguaggio, che chiameremo $\mathcal{L}$, e proseguendo con lo studio delle sue proprietà sintattiche.

Il linguaggio della logica proposizionale

Il linguaggio $\mathcal{L}$ della logica proposizionale è costituito da due componenti, l'alfabeto $\mathcal{A}$ e l'insieme $\mathcal{P}$ delle *formule ben formate* o *forme proposizionali* (fp): $\mathcal{L} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{P} \rangle$.

L'alfabeto $\mathcal{A}$ è costituito da tre insiemi disgiunti di simboli:

(a) un insieme numerabile U di lettere proposizionali:

$$U = \{p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, p_2, q_2, r_2, s_2, t_2, p_3, q_3, r_3, \ldots\}$$

(b) un insieme C di simboli per connettivi vero-funzionali:

$$C = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$$

(c) un insieme S di segni ausiliari (le parentesi tonde aperta e chiusa):

$$S = \{(,)\}$$

Le lettere proposizionali hanno la funzione di indicare le proposizioni semplici. Nel linguaggio $\mathcal{L}$ abbiamo introdotto simboli per quattro connettivi vero-funzionali: negazione, congiunzione, disgiunzione e condizionale. Avremmo potuto introdurre un numero maggiore di simboli prendendo in considerazione altri connettivi, o anche considerarne un numero minore, limitandoci ad una qualsiasi base di connettivi[4]. Le parentesi – come si è già visto nei paragrafi precedenti – hanno la stessa funzione che rivestono in algebra, ossia rendere univocamente intelleggibili le formule più complesse.

La definizione di formula ben formata o forma proposizionale (fp)[5] è di tipo induttivo, ossia è formulata mediante regole che consentono di ottenere nuove fp da fp già ottenute:

F1 Ogni lettera proposizionale è una fp
F2 Se A è una fp, allora $(\neg A)$ è una fp
F3 Se A e B sono fp, allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ sono fp.
F4 Nient'altro è una fp[6].

L'idea è quella che le forme proposizionali (che corrispondono alle proposizioni composte) sono ottenute dalle lettere proposizionali (che stanno per le proposizioni semplici) iterando le operazioni di negazione, congiunzione, disgiunzione e condizionale. Quindi, ad esempio, sono forme proposizionali:

$$p, q, r, s, \ldots$$

e poi:

---

[4]Dal punto di vista dell'indagine metateorica, se il numero dei simboli dell'alfabeto è minore, allora il linguaggio è più semplice e le dimostrazioni richiedono la considerazione di un numero minore di casi. Dal punto di vista applicativo, invece, più ricco è il linguaggio, più dirette sono le "traduzioni" nel linguaggio della logica proposizionale. In questo testo adottiamo un ragionevole compromesso fra i due punti di vista.

[5]Nella prima parte useremo regolarmente l'abbreviazione fp (per forma proposizionale o forme proposizionali), riservando l'abbreviazione fbf (formula ben formata o formule ben formate) per la parte seconda dedicata alla logica dei predicati.

[6]La regola **F4** consente di stabilire quando una espressione formata da simboli dell'alfabeto non è una fp. Le fp sono le liste di simboli ottenute a partire dalle lettere proposizionali (**F1**) mediante le operazioni di negazione, congiunzione, disgiunzione e condizionale (**F2** e **F3**). La regola **F4** equivale ad affermare che l'insieme delle fp è il più piccolo insieme che contiene le lettere proposizionali ed è chiuso rispetto alle quattro operazioni indicate.

$$(\neg p), (p \wedge q), (r \vee p), (s \to q), (\neg s), \ldots$$

e proseguendo:

$$(\neg(\neg p)), ((\neg s) \vee (r \vee q)), (q \to (s \to q)), (r \wedge (p \wedge q)), (\neg(r \vee p)), \ldots$$

e si ottengono fp via via più complesse:

$$\begin{gathered}(\neg((\neg p) \vee (q \to (r \vee (\neg s)))))\\(((\neg p) \wedge (p \to q)) \vee (p \vee (\neg r)))\\((((p \to q) \vee (q \wedge s)) \to (q \vee (\neg p))) \to (\neg(q \vee r)))\\\ldots\end{gathered}$$

Come si vede, più complessa è la fp, più è difficile la lettura. Il ruolo delle parentesi (che divengono via via più numerose) è proprio quello di consentire di stabilire in modo univoco i passi mediante i quali la fp è stata ottenuta a partire dalle lettere proposizionali. Senza entrare in troppi dettagli tecnici osserviamo che, se scriviamo solo le parentesi che figurano nelle fp, si ottengono configurazioni quali (per le ultime tre fp):

$$\begin{gathered}((()((())))) \\ ((()())(())) \\ (((()())(()))(()))\end{gathered}$$

Ebbene, si può dimostrare che un allineamento di un numero pari di parentesi aperte e chiuse (in ugual numero) del genere ammette un solo *accoppiamento proprio*[7]. Ciò consente di dimostrare l'importante:

Teorema 1.3.1 (Unicità di decomposizione) *Per ogni* fp A *vale una ed una sola delle seguenti condizioni:*

1. *A è una lettera proposizionale;*
2. *esiste una ed una sola* fp B *tale che* $A = (\neg B)$*;*
3. *esistono esattamente due* fp B *e* C *ed un unico connettivo binario* $\bullet \in \{\wedge, \vee, \to\}$ *tali che* $A = (B \bullet C)$.

Nel caso 2 si dice che la fp A è una *negazione*; nel caso 3, se $\bullet = \wedge$, allora A è una *congiunzione*, se $\bullet = \vee$, allora A è una *disgiunzione* e, se $\bullet = \to$, allora A è un *condizionale*. Nel caso 2 $\neg$ è il *connettivo principale* della fp, nel caso 3 $\bullet$ è il *connettivo principale* della fp.

Si può definire *complessità* di una fp il numero di connettivi presenti in essa aumentato di 1 (in tal modole lettere proposizionali sono fp di complessità 1). Ogni fp A che non sia una lettera proposizionale è ottenuta mediante **F2**, **F3** o **F4** da una o due fp di complessità minore.

Convenzioni notazionali

In primo luogo introduciamo anche le fp costruite con il bicondizionale $\leftrightarrow$:

$$\boxed{(A \leftrightarrow B) \text{ è intesa come abbreviazione di } ((A \to B) \wedge (B \to A))}$$

[7]Tecnicamente, un *accoppiamento proprio* è una funzione biunivoca f tra le parentesi sinistre e destre tali che, se p è una parentesi sinistra, $f(p)$ è una parentesi destra che la segue nell'allineamento e, se p' e p'' sono parentesi sinistre tali che p' precede p'', allora $f(p'')$ è una parentesi destra che precede $f(p')$.

Sottolineiamo che le fp sono ottenute come indicato nella definizione induttiva precedente. Già dall'inizio del nostro discorso abbiamo usato le lettere maiuscole di inizio dell'alfabeto $(A, B, C, \ldots)$ per indicare fp qualsiasi. Quindi: $A, B, C, \ldots$ (con eventuali apici o indici) sono variabili metateoriche per fp. Una scrittura come quella che abbiamo appena adoperato, e cioè $((A \to B) \wedge (B \to A))$, non rappresenta una fp (mentre, ad esempio, $((p \to q) \wedge (q \to p))$, oppure $(((p \vee r) \to (\neg q)) \wedge ((\neg q) \to (p \vee r)))$ sono fp), poiché A e B non sono simboli del linguaggio della logica proposizionale, ma variabili metateoriche. Scritture di questo genere sono assai frequenti e prendono il nome di *schemi* di fp. Più precisamente, uno schema di fp appare come una fp salvo che contiene, al posto di alcune (o tutte) le lettere proposizionali, delle variabili metateoriche, e quindi "rappresenta" nella metateoria un'infinità di fp, e precisamente quelle che si ottengono sostituendo delle fp al posto delle variabili metateoriche dello schema[8]. Ricordiamo inoltre che l'insieme di tutte le fp è denotato con $\mathcal{P}$, quello delle lettere proposizionali con U. Usiamo poi i simboli metateorici: $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \ldots$ per indicare lettere proposizionali arbitrarie. Nel seguito capiterà spesso di dover considerare insiemi di fp. Per essi useremo le lettere X, Y, Z (eventualmente con apici o indici).

Soppressione di parentesi

Come emerge già dai pochi esempi finora esposti, le fp vengono a contenere un gran numero di parentesi, peraltro necessarie per garantire la decomponibilità unica delle fp stesse. È possibile comunque, come in algebra, ridurre il numero delle parentesi senza perdere l'univocità di lettura. In primo luogo si possono sempre eliminare le due parentesi più esterne. Inoltre si adotta la convenzione che $\neg$ lega più strettamente di $\wedge$ e $\vee$, i quali a loro volta legano più strettamente di $\to$. Le congiunzioni e le disgiunzioni ripetute (come già detto nell'Osservazione 4 del § 1.1) vanno intese come associate a sinistra. Quindi:

$(p \wedge q)$	si abbrevia in	$p \wedge q$
$((\neg q) \to r)$	si abbrevia in	$\neg q \to r$
$(\neg(q \to r))$	si abbrevia in	$\neg(q \to r)$
$((\neg p) \vee q)$	si abbrevia in	$\neg p \vee q$
$(\neg(p \wedge q))$	si abbrevia in	$\neg(p \wedge q)$
$(p \to (\neg(q \wedge r))$	si abbrevia in	$p \to \neg(q \wedge r)$
$(p \to ((\neg q) \wedge r))$	si abbrevia in	$p \to \neg q \wedge r$
$((\neg p) \to \neg(p \wedge (\neg q)))$	si abbrevia in	$\neg p \to \neg(p \wedge \neg q)$
$(\neg(p \to (((\neg r) \vee q)) \vee (\neg p))))$	si abbrevia in	$\neg(p \to \neg r \vee q \vee \neg p)$
$((\neg(p \to (\neg r))) \vee (q \vee (\neg p)))$	si abbrevia in	$\neg(p \to \neg r) \vee (q \vee \neg p)$

[8] È bene tener presente che $p, q, r, \ldots$ sono lettere diverse, mentre $A, B, C, \ldots$ possono indicare anche la stessa fp.

Capitolo 2

La Semantica della Logica Proposizionale

2.1 Introduzione

Avendo a disposizione il linguaggio della logica proposizionale siamo in grado di impostare in modo più rigoroso il problema che abbiamo illustrato nella premessa. Il ragionamento:

> *Andrò in vacanza in aereo o in automobile. Se andrò in aereo giungerò prima a destinazione, e non potrò portare molte valigie. Se andrò in automobile potrò portare molte valigie. Se avrò una vacanza confortevole, allora avrò portato molte valigie. Quindi, se avrò una vacanza confortevole, allora sarò andato in automobile.*

può essere formalizzato nel modo seguente. Ponendo:

p	$=$	andrò in vacanza in aereo
q	$=$	andrò in vacanza in automobile
r	$=$	giungerò prima a destinazione
s	$=$	potrò portare molte valigie
t	$=$	avrò una vacanza confortevole

le premesse del ragionamento si possono esprimere in $\mathcal{L}$ (si osservi che la "o" della prima premessa è chiaramente un "aut", e che il "ma" della seconda premessa, dal punto di vista vero-funzionale, è interpretabile come una congiunzione):

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q);\ \ p \rightarrow r \wedge \neg s;\ \ q \rightarrow s;\ \ t \rightarrow s$$

e la conclusione risulta: $t \rightarrow q$.

Analogamente, il seguente ragionamento:

> *Se Mirco è morto per cause naturali ed era andato dal medico, allora il medico è stato negligente. Mirco era andato dal medico e il medico è stato negligente. Quindi Mirco è morto per cause naturali*

ponendo:

p	$=$	Mirco è morto per cause naturali
q	$=$	Mirco era andato dal medico
r	$=$	il medico è stato negligente

si traduce in $\mathcal{L}$ mediante le seguenti premesse: $p \wedge q \rightarrow r$; $q \wedge r$, e la conclusione p.

Il problema della correttezza dei due ragionamenti si traduce nello stabilire se la fp $t \rightarrow q$ è conseguenza logica dell'insieme di fp:

$$\{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q);\ p \rightarrow r \wedge \neg s;\ q \rightarrow s;\ t \rightarrow s\}$$

e se la fp p è conseguenza logica dell'insieme di fp:

$$\{p \wedge q \rightarrow r;\ q \wedge r\}$$

Obiettivo principale di questo capitolo è quello di presentare una definizione del concetto di *conseguenza logica* tra fp di $\mathcal{L}$ che possa essere utilizzato per risolvere il problema proposto. Tale definizione tradurrà, relativamente al linguaggio della logica proposizionale, il concetto intuitivo in base al quale una proposizione è conseguenza logica di altre se è vera ogniqualvolta queste ultime sono vere. È necessario quindi introdurre una nozione di verità per le fp di $\mathcal{L}$. Ciò viene fatto attraverso il concetto di *valutazione* (o *interpretazione*). In sintesi, una valutazione attribuisce un valore di verità (**V** o **F**) alle lettere proposizionali e, come vedremo più in dettaglio nel prossimo paragrafo, essa determina un valore di verità per ciascuna fp del linguaggio $\mathcal{L}$. Ciò ci consentirà di definire in modo rigoroso la nozione di conseguenza logica.

2.2 Nozioni semantiche fondamentali

Definizione 2.2.1 (Valutazione (o interpretazione)) *Si dice* valutazione (*o* interpretazione) *una qualsiasi funzione v dall'insieme U delle lettere proposizionali all'insieme $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ dei valori di verità.*

Una valutazione v, quindi, assegna a ciascuna lettera proposizionale $\boldsymbol{p}$ uno dei due valori di verità:

- se $v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{V}$ si dice che $\boldsymbol{p}$ è vera nella valutazione v;
- se $v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{F}$ si dice che $\boldsymbol{p}$ è falsa nella valutazione v.

Definizione 2.2.2 (Valutazione booleana) *Si dice* valutazione booleana *dell'insieme $\mathcal{P}$ delle fp una qualsiasi funzione v dall'insieme $\mathcal{P}$ all'insieme $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ dei valori di verità che soddisfa le seguenti quattro condizioni:*

$$\begin{array}{llll}
(1) & v(\neg A) = \mathbf{V} & \textit{se} & v(A) = \mathbf{F} \\
 & v(\neg A) = \mathbf{F} & \textit{se} & v(A) = \mathbf{V} \\
(2) & v(A \wedge B) = \mathbf{V} & \textit{se} & v(A) = v(B) = \mathbf{V} \\
 & v(A \wedge B) = \mathbf{F} & \textit{se} & v(A) = \mathbf{F}\ \textit{o}\ v(B) = \mathbf{F}\ \textit{(o entrambe)} \\
(3) & v(A \vee B) = \mathbf{V} & \textit{se} & v(A) = \mathbf{V}\ \textit{o}\ v(B) = \mathbf{V}\ \textit{(o entrambe)} \\
 & v(A \vee B) = \mathbf{F} & \textit{se} & v(A) = v(B) = \mathbf{F} \\
(4) & v(A \rightarrow B) = \mathbf{V} & \textit{se} & v(A) = \mathbf{F}\ \textit{o}\ v(B) = \mathbf{V}\ \textit{(o entrambe)} \\
 & v(A \rightarrow B) = \mathbf{F} & \textit{se} & v(A) = \mathbf{V}\ \textit{e}\ v(B) = \mathbf{F}
\end{array}$$

Una valutazione booleana è una assegnazione di valori di verità alle fp di $\mathcal{L}$ che rispetta le tavole di verità dei connettivi come introdotte nel §1.1 del capitolo precedente. È attraverso questa definizione che i simboli $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ (i quali, nel linguaggio $\mathcal{L}$, vanno intesi come puri segni grafici) sono associati ai connettivi vero-funzionali omonimi[1].

Il risultato fondamentale, che si può dimostrare rigorosamente per induzione, è il seguente:

[1] Per questa ragione alcuni autori preferiscono indicare in modo diverso i connettivi vero-funzionali nella meta-teoria e nella teoria. Nel §1.1 del capitolo precedente, avremmo potuto indicare i connettivi di negazione, congiunzione, disgiunzione e condizionale, con, ad esempio, `NOT`, `AND`, `OR`, `IF ...THEN ...` e ora interpretare, mediante la definizione precedente, i nostri quattro simboli di $\mathcal{L}$ ordinatamente in questi quattro connettivi vero-funzionali.

Proposizione 2.2.1 *Data una valutazione v delle lettere proposizionali, esiste una ed una sola valutazione booleana dell'insieme delle fp che coincide con v sulle lettere proposizionali.*

In altri termini, se si assegna un valore di verità alle lettere proposizionali, vi è uno ed un solo modo per estenderlo a tutte le fp in modo che siano rispettate le condizioni (1)–(4) della definizione precedente. Ciò è immediata conseguenza della definizione induttiva di fp: ogni fp A è ottenuta iterando le quattro operazioni a partire da alcune lettere proposizionali; quindi, tramite le condizioni (1)–(4), il valore di verità attribuito alle lettere proposizionali si trasmette attraverso le sottoformule via via più complesse fino alla fp A.

Esempio 2.2.1 Sia $A = \neg(p \wedge q \to r) \to (q \vee \neg(p \wedge q))$ e v la valutazione per la quale: $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$, $v(r) = \mathbf{V}$.

Quando $v(p) = \mathbf{V}$ e $v(q) = \mathbf{F}$, allora, in base alla clausola (2), $v(p \wedge q) = \mathbf{F}$. In base alla clausola (4), se $v(p \wedge q) = \mathbf{F}$ e $v(r) = \mathbf{V}$, allora $v(p \wedge q \to r) = \mathbf{V}$, mentre, in base alla clausola (1), $v(\neg(p \wedge q)) = \mathbf{V}$. Se $v(p \wedge q \to r) = \mathbf{V}$, allora $v(\neg(p \wedge q \to r)) = \mathbf{F}$ per la clausola (1), e, se $v(q) = \mathbf{F}$ e $v(\neg(p \wedge q)) = \mathbf{V}$, allora $v(q \vee \neg(p \wedge q)) = \mathbf{V}$ per la clausola (3). Infine, se $v(\neg(p \wedge q \to r) = \mathbf{F}$ e $v(q \vee \neg(p \wedge q)) = \mathbf{V}$, allora $v(A) = \mathbf{V}$ in base alla clausola (4). Quindi, dal valore di verità attribuito alle lettere proposizionali si risale in modo univoco, applicando le clausole (1)–(4), ad attribuire un valore di verità alla fp data. $\oplus$

Esempio 2.2.2 Calcoliamo, in base alla stessa valutazione dell'Esempio 2.2.1, il valore di verità della fp $B = \neg(\neg p \to q) \vee (\neg q \wedge r)$.

Si ha: $v(\neg p) = \mathbf{F}$, $v(\neg p \to q) = \mathbf{V}$, $v(\neg(\neg p \to q)) = \mathbf{F}$, $v(\neg q) = \mathbf{V}$, $v(\neg q \wedge r) = \mathbf{V}$. Infine, da $v(\neg(\neg p \to q)) = \mathbf{F}$ e $v(\neg q \wedge r) = \mathbf{V}$, segue $v(B) = \mathbf{V}$ (in base alla clausola (3)). $\oplus$

Esempio 2.2.3 Determiniamo ora il valore di verità sempre della fp B dell'Esempio 2.2.2, ma in base alla seguente valutazione:

$$v(p) = \mathbf{F},\ v(q) = \mathbf{V},\ v(r) = \mathbf{F}$$

Si ha: $v(\neg p) = \mathbf{V}$, $v(\neg p \to q) = \mathbf{V}$, $v(\neg(\neg p \to q)) = \mathbf{F}$, $v(\neg q) = \mathbf{F}$, $v(\neg q \wedge r) = \mathbf{F}$. In questo caso, da $v(\neg(\neg p \to q)) = \mathbf{F}$ e $v(\neg q \wedge r) = \mathbf{F}$, segue che $v(B) = \mathbf{F}$. $\oplus$

Esempio 2.2.4 Consideriamo la fp $C = (p \to \neg r) \wedge (q \to \neg r)$ e calcoliamone il valore di verità in base alla valutazione v per la quale:

$$v(p) = \mathbf{V},\ v(q) = \mathbf{F},\ v(r) = \mathbf{F}$$

Si ha: $v(\neg r) = \mathbf{V}$, $v(p \to \neg r) = \mathbf{V}$, $v(q \to \neg r) = \mathbf{V}$ per cui $v(C) = \mathbf{V}$.

Se invece la valutazione è tale che:

$$v(p) = \mathbf{V},\ v(q) = \mathbf{F},\ v(r) = \mathbf{V}$$

si ha: $v(\neg r) = \mathbf{F}$, $v(p \to \neg r) = \mathbf{F}$, $v(q \to \neg r) = \mathbf{V}$ per cui $v(C) = \mathbf{F}$. $\oplus$

Osservazione 1. Una valutazione, per definizione, assegna un valore di verità a tutte le lettere proposizionali. È del tutto ovvio che il valore di verità che una fp A riceve in base ad una data valutazione dipende solo dai valori di verità che la valutazione assegna alle lettere proposizionali che figurano nella fp A.

Data una fp A, si può determinare quale valore di verità assume al variare delle possibili valutazioni; queste ultime sono infinite ma, in base a quanto esposto nella precedente Osservazione 1, siccome contano solo i valori di verità assunti dalle lettere proposizionali che figurano in A, le quali sono in numero finito, i casi da trattare sono in numero finito. Più precisamente, se in A vi sono n lettere proposizionali, le possibili valutazioni che differiscono per il modo di valutare almeno una lettera che figura in A sono 2^n. Così, ad esempio, per la precedente fp C, i casi da esaminare sono otto e i risultati si possono riportare nella seguente tabella (analoga a quelle già incontrate nel capitolo precedente):

p	q	r	$(p$	$\to$	$\neg$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$\neg$	$r)$
V	**V**	**V**	*V*	*F*	*F*	*V*	**F**	*V*	*F*	*F*	*V*
V	**V**	**F**	*V*	*V*	*V*	*F*	**V**	*V*	*V*	*V*	*F*
V	**F**	**V**	*V*	*F*	*F*	*V*	**F**	*F*	*V*	*F*	*V*
V	**F**	**F**	*V*	*V*	*V*	*F*	**V**	*F*	*V*	*V*	*F*
F	**V**	**V**	*F*	*V*	*F*	*V*	**F**	*V*	*F*	*F*	*V*
F	**V**	**F**	*F*	*V*	*V*	*F*	**V**	*V*	*V*	*V*	*F*
F	**F**	**V**	*F*	*V*	*F*	*V*	**V**	*F*	*V*	*F*	*V*
F	**F**	**F**	*F*	*V*	*V*	*F*	**V**	*F*	*V*	*V*	*F*

Il risultato finale è nella colonna sotto al connettivo principale (in questo caso $\wedge$). Si vede che il valore assunto da C varia al variare della valutazione. Se si ripete il procedimento con la fp A dell'Esempio 2.2.1 si trova:

p	q	r	$\neg$	$(p$	$\wedge$	q	$\to$	$r)$	$\to$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q))$
V	**V**	**V**	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	**V**	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*
V	**V**	**F**	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	**V**	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*
V	**F**	**V**	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	**V**	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
V	**F**	**F**	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	**V**	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	**V**	**V**	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	**V**	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*
F	**V**	**F**	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	**V**	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*
F	**F**	**V**	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	**V**	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*
F	**F**	**F**	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	**V**	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*

Sotto al connettivo principale figurano tutte **V**, quindi la fp A assume valore **V** qualsiasi sia il valore di verità attribuito alle lettere proposizionali che figurano in essa.

Definizione 2.2.3 (Modello) *Sia v una valutazione e A una fp. Se $v(A) = \mathbf{V}$, si dice che v è* modello *di A e si scrive $v \models A$ (se $v(A) = \mathbf{F}$, cioè v non è modello di A, si scrive $v \not\models A$). Data una valutazione v e un insieme di fp X, se per ogni $A \in X$, $v(A) = \mathbf{V}$, si dice che v è modello di X, e si scrive $v \models X$.*

Definizione 2.2.4 (Tautologia) *Si dice che una fp A è una* tautologia *(è* valida*) se e solo se assume valore **V** in base ad ogni valutazione, ossia se ogni valutazione è modello di A.*

Per indicare che A è una tautologia si scrive $\models A$; quindi[2]:

$$\boxed{\models A \iff \text{per ogni } v,\ v \models A}$$

Si dice che una fp A è una *contraddizione* se e solo se assume valore **F** in base ad ogni valutazione, ossia se ogni valutazione non è modello di A. Ad esempio, è una contraddizione $p \wedge \neg p$ (e in genere una qualsiasi fp del tipo $A \wedge \neg A$).

Si verifica immediatamente che:

$$A \text{ è una contraddizione} \iff \neg A \text{ è una tautologia}$$
$$A \text{ è una tautologia} \iff \neg A \text{ è una contraddizione}$$

Non è quindi necessario introdurre un simbolo per indicare che A è una contraddizione, in quanto tale circostanza si può esprimere con $\models \neg A$.

Definizione 2.2.5 (Soddisfacibilità) *Si dice che una fp A è* soddisfacibile *se e solo esiste almeno una valutazione v che è modello di A.*

$$\boxed{\text{Sod } A \iff \text{esiste una valutazione } v \text{ tale che } v \models A}$$

[2]Il simbolo $\iff$ abbrevia il "se e solo se" metateorico.

Dire che A è soddisfacibile equivale ad affermare che A non è una contraddizione. Per indicare che A è soddisfacibile scriveremo Sod A. Si osservi che Sod A è equivalente a dire che non vale $\models \neg A$ (il che, a sua volta, non equivale a dire $\models A$!), che indicheremo anche $\not\models \neg A$. Il concetto di soddisfacibilità si estende ad insiemi di fp. Si dice che un insieme X di fp è soddisfacibile (Sod X) se è solo se esiste una valutazione che è modello di tutte le fp di X:

$$\boxed{\text{Sod } X \iff \text{esiste una valutazione } v \text{ tale che, per ogni } A \in X,\ v \models A}$$

Osservazione 2. Si noti che un insieme può non essere soddisfacibile anche se sono soddisfacibili tutte le fp che gli appartengono. Ad esempio, sia la fp $\neg p$, sia la fp $p \wedge q$ sono soddisfacibili (la prima ha valore **V** se $v(p) = \mathbf{F}$, la seconda ha valore **V** se $v(p) = v(q) = \mathbf{V}$), ma l'insieme:

$$X = \{\neg p, p \wedge q\}$$

non è soddisfacibile in quanto, come si verifica facilmente, nessuna valutazione può rendere simultaneamente vere le fp di X.

Un insieme non soddisfacibile viene detto *semanticamente incoerente* e ha la proprietà che, comunque data una valutazione, in base ad essa almeno una sua fp assume valore **F**. Per indicare che X è non soddisfacibile scriveremo NonSod X.

Esempio 2.2.5 Consideriamo le due fp:

$$A = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

$$B = p \vee q$$

e scriviamone le tavole di verità:

						A						B	
p	q	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	$(\neg$	p	$\wedge$	$q)$	p	$\vee$	q
V	**V**	*V*	*F*	*F*	*V*	**F**	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	**V**	*V*
V	**F**	*V*	*V*	*V*	*F*	**V**	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	**V**	*F*
F	**V**	*F*	*F*	*F*	*V*	**V**	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	**V**	*V*
F	**F**	*F*	*F*	*V*	*F*	**F**	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	**F**	*F*

Si può osservare che nelle righe in cui A ha valore di verità **V** (la seconda e la terza) anche B ha valore di verità **V**; quindi, in altri termini, se è vera A, allora è vera anche B. Quando si verifica una situazione del genere si dice che B è conseguenza logica di A. Si può altresì osservare che vi è un caso (la prima riga, quando p e q sono entrambe vere) in cui B ha valore **V** mentre A ha valore **F**; quindi non vale che, quando B è vera, lo è anche A, per cui A non è conseguenza logica di B. $\oplus$

Definizione 2.2.6 (Conseguenza logica) *Si dice che la fp B è* conseguenza logica della fp *A, e si scrive $A \models B$, se e solo se ogni valutazione che è modello di A è anche modello di A:*

$$\boxed{A \models B \iff \text{per ogni } v, \text{ se } v \models A \text{ allora } v \models B}$$

Esempio 2.2.6 Se, con riferimento al precedente esempio, inseriamo anche la tavola di $C = \neg(p \wedge q)$:

						A						B				C	
p	q	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\vee$	$(\neg$	p	$\wedge$	$q)$	p	$\vee$	q	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$
V	**V**	*V*	*F*	*F*	*V*	**F**	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	**V**	*V*	**F**	*V*	*V*	*V*
V	**F**	*V*	*V*	*V*	*F*	**V**	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	**V**	*F*	**V**	*V*	*F*	*F*
F	**V**	*F*	*F*	*F*	*V*	**V**	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	**V**	*V*	**V**	*F*	*F*	*V*
F	**F**	*F*	*F*	*V*	*F*	**F**	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	**F**	*F*	**V**	*F*	*F*	*F*

si può osservare che, quando B e C sono entrambe vere (nella seconda e nella terza riga), allora anche A è vera. Anche se si è osservato in precedenza che A non è conseguenza logica di B, tuttavia A risulta conseguenza logica di $\{B, C\}$. In questo esempio, comunque scelte due fra le tre fp A, B e C, la terza ne è conseguenza logica. $\oplus$

Definizione 2.2.7 (Conseguenza logica generalizzata) *Si dice che la fp A è* conseguenza logica *dell'insieme di fp X, e si scrive $X \models A$, se e solo se ogni valutazione che è modello di X è anche modello di A (in altri termini, se ogni valutazione che rende vere tutte le fp di X rende vera anche A):*

$$\boxed{X \models A \Longleftrightarrow \text{per ogni } v, \text{ se } v \models X, \text{ allora } v \models A}$$

Con riferimento all'Esempio 2.2.6 si può scrivere:

$$\{p \vee q, \neg(p \wedge q)\} \models (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

o anche, tralasciando le parentesi graffe:

$$p \vee q, \neg(p \wedge q) \models (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Osservazione notazionale. Il simbolo $\models$ è stato impiegato per indicare vari concetti:

1)	$v \models A$	(la valutazione v rende vera la fp A)
2)	$v \models X$	(la valutazione v rende vere tutte le fp dell'insieme X)
3)	$\models A$	(la fp A è una tautologia)
4)	$A \models B$	(la fp B è conseguenza logica della fp A)
5)	$X \models A$	(la fp A è conseguenza logica dell'insieme di fp X).

La 4) può essere vista come un caso particolare della 5), quando l'insieme X contiene un solo elemento: se $X = \{A\}$, anziché $\{A\} \models B$, si scrive $A \models B$. La 5), nel caso in cui X sia vuoto ($X = \emptyset$), equivale alla 3): infatti $\emptyset \models A$ equivale a $\models A$ (una fp A è conseguenza logica dell'insieme vuoto se è vera tutte le volte che sono vere le fp di $\emptyset$, ma poiché quest'ultima circostanza è sempre banalmente verificata - per ogni v, $v \models \emptyset$[3] -, ciò equivale a dire che A è sempre vera, cioè che è una tautologia). L'impiego dello stesso simbolo in 3), 4) e 5), quindi, non dà luogo ad equivoci. In 1) e 2) il simbolo è preceduto dalla lettera v, cioè dal nome di una valutazione, e non può esservi confusione con gli altri casi.

2.3 Proprietà delle tautologie. Equivalenza logica

Vediamo le principali proprietà e relazioni tra alcuni concetti introdotti nel §2.2.

Teorema 2.3.1 *La fp B è conseguenza logica della fp A se e solo se la fp $A \to B$ è una tautologia:*

$$\boxed{A \models B \iff \models A \to B}$$

Dim. ($\Rightarrow$) Per ipotesi $A \models B$, e si deve dimostrare che $A \to B$ è una tautologia. Per assurdo, se $A \to B$ non fosse una tautologia, dovrebbe esistere una valutazione v tale che $v(A \to B) = \mathbf{F}$. Ma allora risulterebbe $v(A) = \mathbf{V}$ e $v(B) = \mathbf{F}$, contro l'ipotesi (se una valutazione rende vera A, deve rendere vera anche B).
($\Leftarrow$) Per ipotesi $A \to B$ è una tautologia, e si deve dimostrare che $A \models B$. Sia v una valutazione che rende vera A ($v(A) = \mathbf{V}$). Dato che $A \to B$ è una tautologia, $v(A \to B) = \mathbf{V}$. Deve quindi

[3]Se esistesse una v che non è modello dell'insieme vuoto, tale v dovrebbe rendere falsa una fp di $\emptyset$, e ciò è impossibile poiché $\emptyset$ non contiene alcuna fp.

essere $v(B) = \mathbf{V}$ (se fosse $v(B) = \mathbf{F}$, allora, da $v(A) = \mathbf{V}$ seguirebbe $v(A \to B) = \mathbf{F}$). Quindi, se v rende vera A, rende vera B, che è la tesi. C.V.D.

Osservazione 1. Per il Teorema 2.3.1 l'essere B conseguenza logica di una fp A equivale all'essere una tautologia del condizionale $A \to B$. Questo risultato si estende facilmente alla conseguenza logica da un insieme finito di fp.

Se $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, allora evidentemente una valutazione è modello di X se e solo se è modello dell'unica fp che è la congiunzione delle fp di X:

$$v \models \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \Longleftrightarrow v \models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$$

Da questa equivalenza e dal Teorema 2.3.1 si ottiene:

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \models B \Longleftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \models B \Longleftrightarrow \models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \to B$$

Teorema 2.3.2 *Se* $\models A$ *e* $\models A \to B$*, allora* $\models B$*.*

Dim. Infatti, se $\models A \to B$, dal Teorema 2.3.1 segue $A \models B$, cioè ogni volta che A è vera, è vera anche B; ma A, per ipotesi, è sempre vera, quindi è sempre vera anche B, cioè $\models B$. C.V.D.

Teorema 2.3.3 $\models A \wedge B \Longleftrightarrow \models A$ *e* $\models B$*.*

Dim. Esercizio.

Definizione 2.3.1 (Equivalenza logica) *Si dice che le due fp A e B sono* logicamente equivalenti*, e si scrive $A \equiv B$, se e solo se $A \models B$ e $B \models A$ (cioè una è conseguenza logica dell'altra e viceversa):*

$$\boxed{A \equiv B \Longleftrightarrow A \models B \text{ e } B \models A}$$

Osservazione 2. Dai teoremi precedenti, ricordando la definizione di $A \leftrightarrow B$ dalla quale si ricava che $v(A \leftrightarrow B) = \mathbf{V}$ se e solo se $v(A) = v(B)$, cioè se le due fp A e B hanno in base a v lo stesso valore di verità, segue facilmente che:

$$\boxed{A \equiv B \Longleftrightarrow \models A \leftrightarrow B}$$

(due fp sono logicamente equivalenti se e solo se il loro bicondizionale è una tautologia). Mediante il concetto di equivalenza logica si possono esprimere con maggiore precisione le equivalenze incontrate nel §1.1 del Cap. 1.

L'equivalenza logica è una relazione di equivalenza tra fp, ossia è:

(a) riflessiva: per ogni A, $A \equiv A$
(b) simmetrica: per ogni A e B, se $A \equiv B$, allora $B \equiv A$;
(c) transitiva: per ogni A, B e C, se $A \equiv B$ e $B \equiv C$, allora $A \equiv C$

Se A è una fp che contiene la lettera $\boldsymbol{p}$, indichiamo con $A(\boldsymbol{p}/B)$ la fp che si ottiene sostituendo in A ogni occorrenza della lettera $\boldsymbol{p}$ con la fp B.

Esempio 1. Se $A = p \to (\neg q \wedge p)$, allora:

$$A(p/q \vee r) = q \vee r \to (\neg q \wedge (q \vee r))$$
$$A(p/r \to \neg p) = (r \to \neg p) \to (\neg q \wedge (r \to \neg p))$$
$$A(q/\neg(q \vee r)) = p \to (\neg\neg(q \vee r) \wedge p)$$
$$A(q/(p \to q) \vee \neg s) = p \to (\neg((p \to q) \vee \neg s) \wedge p)$$

1)	$p \vee \neg p$	(principio del terzo escluso)
2)	$\neg(p \wedge \neg p)$	(principio di non contraddizione)
3)	$p \wedge p \leftrightarrow p$	(idempotenza della congiunzione)
4)	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$	(commutatività della congiunzione)
5)	$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	(associatività della congiunzione)
6)	$p \wedge q \rightarrow p$	
7)	$p \wedge q \rightarrow q$	
8)	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$	
9)	$p \vee p \leftrightarrow p$	(idempotenza della disgiunzione)
10)	$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$	(commutatività della disgiunzione)
11)	$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	(associatività della disgiunzione)
12)	$p \rightarrow p \vee q$	
13)	$q \rightarrow p \vee q$	
14)	$(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$	
15)	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$	(legge di assorbimento)
16)	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$	(legge di assorbimento)
17)	$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(distributività di $\wedge$ rispetto a $\vee$)
18)	$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(distributività di $\vee$ rispetto a $\wedge$)
19)	$\neg\neg p \leftrightarrow p$	(legge della doppia negazione)
20)	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	(legge di De Morgan)
21)	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	(legge di De Morgan)
22)	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \leftrightarrow p$	
23)	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \leftrightarrow p$	
24)	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$	
25)	$(p \vee q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$	
26)	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	
27)	$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$	
28)	$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$	
29)	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	(legge di contrapposizione)
30)	$(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg p)$	(legge di contrapposizione)
31)	$(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow p)$	(legge di contrapposizione)
32)	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	
33)	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$	(sillogismo)
34)	$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	
35)	$(p \rightarrow q \wedge r) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$	
36)	$(p \rightarrow q \vee r) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$	
37)	$(p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$	
38)	$p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$	
39)	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$	(legge di Peirce)
40)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	(legge di Frege)
41)	$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$	(legge di Scoto)
42)	$p \wedge \neg p \rightarrow q$	(legge di Scoto)
43)	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$	
44)	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$	
45)	$\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$	
46)	$p \leftrightarrow p$	
47)	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	
48)	$(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$	
49)	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$	
50)	$\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$	
51)	$p \leftrightarrow (p \wedge q)) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$	
52)	$(p \leftrightarrow (p \vee q)) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$	
53)	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \leftrightarrow q \wedge r)$	
54)	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee r \leftrightarrow q \vee r)$	
55)	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \leftrightarrow (r \rightarrow q))$	
56)	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \rightarrow r))$	

Figura 2.1: **Elenco delle principali tautologie**

Teorema 2.3.4 *Se* $\models A$, *allora, per ogni* $\boldsymbol{p}$ *e* B, $\models A(\boldsymbol{p}/B)$.

Dim. Infatti, presa una qualsiasi valutazione v, il valore $v(A(\boldsymbol{p}/B))$, per quanto appena osservato, coincide con il valore di A nella valutazione che è uguale a v salvo per il fatto che assegna a $\boldsymbol{p}$ il valore $v(B)$. Ma qualsiasi sia la valutazione il valore di A è $\mathbf{V}$ (essendo $\models A$), e quindi $v(A(\boldsymbol{p}/B)) = \mathbf{V}$ rispetto ad ogni valutazione e $A(\boldsymbol{p}/B)$ è una tautologia. C.V.D.

Dal Teorema 2.3.4 segue che, presa una qualsiasi tautologia (ad esempio una qualunque di quelle che sono elencate nella figura 2.1), se si sostituisce una lettera – ovunque appaia – con una fp qualsiasi, si ottiene ancora una tautologia; così dalla tautologia 32, $p \to (q \to p)$, si ha che sono tautologie:

$$\begin{array}{ll}
r \wedge \neg s \to (q \to r \wedge \neg s) & A(p/r \wedge \neg s) \\
\neg\neg q \to (q \to \neg\neg q) & A(p/\neg\neg q) \\
(p \wedge (q \to r)) \to (q \to (p \wedge (q \to r))) & A(p/p \wedge (q \to r)) \\
p \to (\neg(q \vee r) \to p) & A(q/\neg(q \vee r)) \\
p \to ((p \to \neg r) \wedge (p \to \neg s) \to p) & A(q/(p \to \neg r) \wedge (p \to \neg s))
\end{array}$$

In generale si può dire che:

$$A \to (B \to A)$$

è uno *schema di tautologie*: qualsiasi fp si sostituiscano al posto di A e B si ottiene sempre una tautologia. Un analogo discorso vale per tutte le tautologie che, in base al Teorema 2.3.4, si possono trasformare in schemi di tautologie.

Sia A una fp e A' una sottoformula di A. Se B' è una fp qualsiasi, con $A(A'/B')$ si indica la fp B che si ottiene sostituendo in A la sottoformula A' con la fp B'.

Teorema 2.3.5 *Per ogni* A, A', B', $\models (A' \leftrightarrow B') \to (A \leftrightarrow B)$

Dim. Si deve dimostrare che $(A' \leftrightarrow B') \to (A \leftrightarrow B)$ è uno schema di tautologie, ossia che, qualsiasi sia la valutazione v, qualsiasi siano la fp A, la sua sottoformula A' e la fp B', $v((A' \leftrightarrow B') \to (A \leftrightarrow B)) = \mathbf{V}$, dove $B = A(A'/B')$.

Sia v una qualsiasi valutazione. Si hanno due casi:

1. $v(A')$ è diverso da $v(B')$; in tal caso $v(A' \leftrightarrow B') = \mathbf{F}$, ma allora il condizionale ha antecedente falso e quindi $v((A' \leftrightarrow B') \to (A \leftrightarrow B)) = \mathbf{V}$;

2. $v(A')$ è uguale a $v(B')$; in tal caso $v(A' \leftrightarrow B') = \mathbf{V}$; ne segue, per come si è eseguita la sostituzione, che $v(A) = v(B)$, per cui $v(A \leftrightarrow B) = \mathbf{V}$; ma allora il condizionale ha sia l'antecedente che il conseguente veri, per cui $v((A' \leftrightarrow B') \to (A \leftrightarrow B)) = \mathbf{V}$.

In entrambi i casi $v((A' \leftrightarrow B') \to (A \leftrightarrow B)) = \mathbf{V}$. C.V.D.

Dal Teorema 2.3.5 e dal Teorema 2.3.2 segue immediatamente:

$$\text{se} \models A' \leftrightarrow B', \text{allora} \models A \leftrightarrow B \qquad (A' \equiv B' \Rightarrow A \equiv B)$$

ossia, se A' è logicamente equivalente a B', allora A è logicamente equivalente a B. Quindi, se in una qualsiasi fp A si sostituisce una sottoformula A' con una logicamente equivalente B', la fp B che ne risulta è logicamente equivalente alla fp di partenza. Sfruttando questa proprietà, data una fp A, se ne può ottenere una logicamente equivalente che abbia qualche caratteristica desiderata. Ad esempio, sfruttando lo schema di tautologie:

$$(B \to C) \leftrightarrow (\neg B \vee C)$$

(che si ottiene dalla tautologia 24 generalizzandola con il Teorema 2.3.4), se si sostituisce ogni sottoformula di A che è della forma $(B \to C)$ (cioè che è un condizionale), con $(\neg B \vee C)$, si ottiene una fp logicamente equivalente ad A che contiene solo i tre connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Sfruttando le leggi di De Morgan si può proseguire ottenendo una fp logicamente equivalente ad A che contiene solo i due connettivi $\neg$, $\wedge$, oppure solo i due connettivi $\neg$, $\vee$. Sfruttando gli schemi di tautologie $A \wedge B \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$ e $A \vee B \leftrightarrow (\neg A \to B)$ si può pervenire ad una fp equivalente ad una data che contiene solo i connettivi $\neg$, $\to$.

Esempio 2.3.1 Nelle seguenti trasformazioni si ottengono fp logicamente equivalenti tra loro (si giustifichi ciascun passaggio):

1) $p \to (q \vee \neg\neg r) \equiv p \to (q \vee r) \equiv p \to \neg(\neg q \wedge \neg r) \equiv \neg(p \wedge \neg\neg(\neg q \wedge \neg r)) \equiv$
$\equiv \neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

2) $\neg p \to (q \equiv p) \equiv \neg p \to ((q \to p) \wedge (p \to q)) \equiv \neg p \to ((\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)) \equiv$
$\equiv \neg(\neg p \wedge \neg((\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q))) \equiv \neg(\neg p \wedge (\neg(\neg q \vee p) \vee \neg(\neg p \vee q))) \equiv$
$\equiv \neg(\neg p \wedge ((\neg\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg\neg p \wedge \neg q))) \equiv \neg(\neg p \wedge ((q \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q))) \equiv$
$\equiv \neg((\neg p \wedge (q \wedge \neg p)) \vee (\neg p \wedge (p \wedge \neg q))) \equiv \neg(\neg p \wedge q) \equiv \neg\neg p \vee \neg q \equiv p \vee \neg q$

3) $p \wedge (\neg q \vee (p \equiv q)) \equiv \neg(p \to \neg(\neg q \vee (p \equiv q)) \equiv \neg(p \to \neg(\neg\neg q \to (p \equiv q))) \equiv$
$\equiv \neg(p \to \neg(q \to (p \equiv q))) \equiv \neg(p \to \neg(q \to ((p \to q) \wedge (q \to p)))) \equiv$
$\equiv \neg(p \to \neg(q \to \neg((p \to q) \to \neg(q \to p))))$

$\oplus$

2.4 Proprietà della relazione di conseguenza logica

Esaminiamo ora alcune ulteriori proprietà della nozione di conseguenza logica.

Teorema 2.4.1 (Proprietà di monotonicità) *Se $X \models A$, allora $X \cup Y \models A$.*

Dim. Evidentemente, se una valutazione rende vere tutte le fp dell'insieme $X \cup Y$ (cioè $v \models X \cup Y$), allora rende vere le fp di X (cioè $v \models X$), e quindi, per ipotesi, rende vera A. C.V.D.

Quindi, se una fp è conseguenza logica di un insieme di fp X, a maggior ragione è conseguenza di un soprainsieme di X. È inoltre evidente il seguente:

Teorema 2.4.2 *Se $A \in X$, allora $X \models A$.*

Teorema 2.4.3 *Se $X \models A$ e $A \models B$, allora $X \models B$.*

Dim. Sia v tale che $v \models X$. Per la prima ipotesi $v \models A$. Se $v \models A$, per la seconda ipotesi, $v \models B$. Quindi, se $v \models X$, allora $v \models B$, cioè $X \models B$. C.V.D.

Teorema 2.4.4 $X \models A \Longleftrightarrow$ NonSod $X \cup \{\neg A\}$.

Dim. ($\Rightarrow$) Sia $X \models \{A\}$. Per assurdo, se fosse Sod $X \cup \neg A$, dovrebbe esistere una valutazione v tale che $v \models X \cup \{\neg A\}$, ossia tale che $v \models X$ e $v \models \neg A$, cioè $v \not\models A$. Per ipotesi, se $v \models X$, allora $v \models A$, e si è trovato l'assurdo.
($\Leftarrow$) Sia NonSod $X \cup \{\neg A\}$. Se non fosse $X \models A$, vi sarebbe una valutazione v tale che $v \models X$ e $v \not\models A$, cioè $v \models \neg A$. Ma se esistesse v tale che $v \models X$ e $v \models \neg A$, allora sarebbe Sod $X \cup \{\neg A\}$, contro l'ipotesi. C.V.D.

Elenchiamo, lasciando come esercizio la relativa dimostrazione, alcune altre proprietà che riguardano fp composte che sono conseguenza logica di un insieme di fp:

Teorema 2.4.5 $X \models \neg A \Longleftrightarrow$ NonSod $X \cup \{A\}$.

Teorema 2.4.6 $X \models A$ *e* $X \models B \Longleftrightarrow X \models A \wedge B$.

Teorema 2.4.7 *Se $X \models A$, allora $X \models A \vee B$ e $X \models B \vee A$.*

Teorema 2.4.8 $X \cup \{A\} \models C$ *e* $X \cup \{B\} \models C \Longleftrightarrow X \cup \{A \vee B\} \models C$.

Teorema 2.4.9 $X \cup \{A\} \models B \iff X \models A \to B$.

Teorema 2.4.10 $X \cup \{A\} \models B$ *e* $X \cup \{B\} \models A \iff X \models (A \leftrightarrow B)$.

Teorema 2.4.11 *Se*$X \cup \{A\} \models B$ *e* $X \cup \{\neg A\} \models B$, *allora* $X \models B$.

Sono importanti le due seguenti proprietà. La prima afferma che un insieme non soddisfacibile di fp ha come conseguenza logica qualsiasi fp:

Teorema 2.4.12 *Se* NonSod X, *allora, per ogni fp* A, $X \models A$.

Dim. Infatti, perché non valga $X \models A$, occorre che esista una valutazione v tale che $v \models X$ e $v \not\models A$. Ma ciò è impossibile poiché, per ipotesi, NonSod X, cioè non esiste alcuna v tale che $v \models X$. C.V.D.

La seconda afferma che una tautologia è conseguenza logica di qualsiasi insieme di fp:

Teorema 2.4.13 *Se* $\models A$, *allora, per ogni insieme di fp* X, $X \models A$.

Dim. Come nel caso precedente, perché non valga $X \models A$, occorre che esista una valutazione v tale che $v \models X$ e $v \not\models A$. Ma ciò è impossibile poiché, per ipotesi, $\models A$, e quindi, per ogni v, $v \models A$. C.V.D.

2.5 Conclusione

Quanto finora visto ci consente di risolvere il problema posto nel §2.1. Per verificare se una fp A è conseguenza logica di un insieme X (finito) di altre è sufficiente passare in rassegna tutte le possibili valutazioni (limitandoci a considerare i possibili valori di verità delle lettere proposizionali che figurano in X e in A) e controllare se, quando tutte le fp di X hanno valore **V**, anche A ha valore di verità **V**. In caso affermativo A è conseguenza logica di X; in caso contrario, cioè se per almeno una valutazione tutte le fp di X ricevono valore **V** e A riceve valore **F**, allora A non è conseguenza logica di X.

Vediamo come funziona tale procedimento nel caso del secondo ragionamento richiamato nel §2.1.

Si tratta di verificare se:

$$p \wedge q \to r, q \wedge r \models p$$

Se consideriamo la valutazione v tale che $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{V}$, allora $v(p \wedge q \to r) = \mathbf{V}$, $v(q \wedge r) = \mathbf{V}$ e $V(p) = \mathbf{V}$. Se consideriamo la valutazione v tale che $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{V}$, allora $v(p \wedge q \to r) = \mathbf{V}$, $v(q \wedge r) = \mathbf{V}$ e $v(p) = \mathbf{F}$. Basta questo per concludere che non sussiste il nesso di conseguenza logica (e, quindi, che il ragionamento è scorretto).

Nel caso del primo ragionamento si tratta di verificare se:

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q); p \to r \wedge \neg s; q \to s; t \to s \models t \to q$$

Abbiamo già preannunciato che tale ragionamento è corretto e, quindi, che il precedente nesso di conseguenza logica sussiste. Ciò significa che, per avere una conferma attraverso il procedimento indicato, dovremmo passare in rassegna tutte le possibili valutazioni che differiscono per il modo di valutare almeno una tra le le lettere proposizionali p, q, r, s e t. Esse sono in numero di trentadue[4], quindi il lavoro è lungo e cresce in maniera esponenziale con il numero delle lettere coinvolte.

Si può allora, come abbiamo già accennato nella *Premessa*, procedere per assurdo. Supponiamo che il nesso di conseguenza logica non sussista. Deve esistere allora una valutazione v tale che:

$$v((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) = \mathbf{V}, v(p \to r \wedge \neg s) = \mathbf{V}, v(q \to s) = \mathbf{V}, v(t \to s) = \mathbf{V}$$

[4] In generale, se le lettere proposizionali coinvolte sono n, le valutazioni da prendere in considerazione sono, come le righe delle tavole di verità, in numero di 2^n.

mentre

$$v(t \to q) = \mathbf{F}$$

.

Da $v(t \to q) = \mathbf{F}$, segue $v(t) = \mathbf{V}$ e $v(q) = \mathbf{F}$.
Se $v(t) = \mathbf{V}$, allora, da $v(t \to s) = \mathbf{V}$, segue $v(s) = \mathbf{V}$.
Se $v(s) = \mathbf{V}$, allora $v(\neg s) = \mathbf{F}$, e anche $v(r \wedge \neg s) = \mathbf{F}$. Quindi, da $v(p \to r \wedge \neg s) = \mathbf{V}$, segue $v(p) = \mathbf{F}$.
Da $v(p) = \mathbf{F}$ e $v(q) = \mathbf{F}$ segue sia $v(p \wedge \neg q) = \mathbf{F}$ che $v(\neg p \wedge q) = \mathbf{F}$, e allora $v((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) = \mathbf{F}$, in contraddizione con $v((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) = \mathbf{V}$.

Non potendo esistere una valutazione che rende vere le premesse e falsa la conclusione si può concludere che sussiste il nesso di conseguenza logica (e quindi che il ragionamento è corretto).

Nel prossimo capitolo ci soffermeremo ampiamente proprio su quest'ultimo metodo di riduzione all'assurdo, esplicitandolo attraverso un sistema di regole meccaniche. Ciò ci consentirà, come vedremo, non solo di risolvere più speditamente esercizi di verifica di tautologie e di correttezza di ragionamenti, ma anche di ottenere nuove informazioni sul nesso di conseguenza logica.

2.6 Appendice: I connettivi vero-funzionali e il linguaggio comune

Nel paragrafo precedente si è visto come le tecniche presentate consentano di decidere sulla correttezza o meno dei ragionamenti. È bene però precisare che la soluzione ottenuta è definitiva solo per quanto riguarda il problema di stabilire se una certa fp A del linguaggio $\mathcal{L}$ è o non è conseguenza logica di un dato insieme X di fp, sempre del linguaggio $\mathcal{L}$, assunte come premesse. I ragionamenti sono stati inizialmente espressi nel linguaggio naturale e, prima che si possano applicare le nozioni illustrate in questo capitolo, è stata necessaria una "traduzione" dal linguaggio naturale al linguaggio $\mathcal{L}$. Le conclusioni ottenute possono essere riportate ai ragionamenti solo se la "traduzione" è stata fedele. Come si è detto, il linguaggio naturale non è articolato al fine di esprimere ragionamenti; anzi, da questo punto di vista, appare assai carente a causa delle sue ridondanze, sfumature, ambiguità: nell'uso del linguaggio naturale si presentano svariate situazioni in cui la "forma logica" delle proposizioni non solo è tutt'altro che trasparente, ma è persino in contrasto con la loro lettura sintattica superficiale. Quindi, occorre tener presente che, per applicare le tecniche formali all'analisi di ragionamenti nel linguaggio comune, occorrono due fasi distinte: la "traduzione" in $\mathcal{L}$ e, poi, l'impiego delle tecniche relative a $\mathcal{L}$. La plausibilità delle conclusioni dipende dal corretto svolgimento di entrambe le fasi. Orbene, il logico è interessato essenzialmente alla seconda fase, mentre l'esecuzione della prima è di competenza dello studioso del linguaggio, il quale ha il compito di rivelare la struttura logica "profonda" (l'effettivo significato) delle proposizioni del linguaggio naturale. Questi aspetti sono particolarmente evidenti se si considera come sono impiegati i connettivi nel linguaggio naturale.

• Consideriamo la congiunzione "e". Nel linguaggio naturale "e" congiunge non solo proposizioni, ma anche nomi, verbi, avverbi, e così via.

La proposizione: "*Carlo e Dario sono italiani*" è evidentemente equivalente a: "*Carlo è italiano e Dario è italiano*" (e l'uso di "e" è vero-funzionale). Tuttavia la proposizione: "*Carlo e Dario sono amici*", pur avendo la stessa struttura grammaticale, non ha il significato di: "*Carlo è amico e Dario è amico*" ma di: "*Carlo è amico di Dario e Dario è amico di Carlo*" (e la "e" è vero-funzionale). Ma se diciamo: "*Carlo e Dario pesano 150 Kg*" o anche: "*Carlo e Dario sono una bella coppia*" non si può distribuire il predicato sui singoli individui. La proposizione:

$$\text{“\textit{Carlo e Dario stanno venendo}”} \tag{2.1}$$

può significare sia: "*Carlo sta venendo e Dario sta venendo*" sia: "*Carlo e Dario stanno venendo insieme*". In questo secondo caso la verità della proposizione (2.1) non dipende solo dalla verità delle proposizioni componenti ("*Carlo sta venendo*" e "*Dario sta venendo*") e quindi tale uso di "e" non è vero vero-funzionale. Anche nel caso di: "*La maglia del Milan è rossa e nera*" non si intende affatto affermare che: "*La maglia del Milan è rossa e la maglia del Milan è nera*". Un altro esempio di uso non vero-funzionale di "e" è il seguente: "*Sono andato alla stazione e ho preso il treno*" in cui la verità della proposizione dipende, oltre che dalla verità delle due componenti, anche dal loro ordine temporale. È infatti diverso dire: "*Ho preso il treno e sono andato alla stazione*" (la non validità della proprietà commutativa è indice della non vero-funzionalità dell'uso di "e").

Già questi pochi esempi illustrano come non sempre "e" ha il significato codificato con il connettivo $\wedge$; la "traduzione" di "e" con "$\wedge$" è lecita quando l'uso di "e" è tra proposizioni ed è vero-funzionale. In molti casi la traduzione è lecita, ed è per questa ragione che leggiamo il simbolo "$\wedge$" come "e", ma non vale il viceversa.

• Nel caso di "o" la situazione è ancora più complessa. Nel §1.1 del Cap. 1 si è visto che, anche restando nell'ambito della vero-funzionalità, vi sono almeno tre usi di "o": la disgiunzione inclusiva (*vel*), la disgiunzione esclusiva (*aut*) e la disgiunzione di incompatibilità. L'uso di tale connettivo è pertanto intrinsecamente ambiguo, poiché solo il contesto (o la dichiarazione del parlante) può chiarire a quale dei tre significati si faccia riferimento.

• Il connettivo che solleva, in questo contesto, il maggior numero di problemi è il condizionale, il quale viene letto "se ..., allora ...". Il fatto è che, nel linguaggio comune, "se ..., allora ..." viene impiegato per esprimere un nesso tra l'antecedente e il conseguente e quindi la verità di una proposizione del tipo "se A, allora B" si basa sul sussistere di tale nesso (e non solo sul valore di verità di A e di B); in altri termini, gli usi del "se ..., allora ..." sono molto spesso non vero-funzionali. Prima di vedere qualche esempio, torniamo brevemente sul problema della scelta della tavola di verità di $\rightarrow$ (del condizionale materiale). Nel §1.1 del Cap. 1 si è giustificata tale scelta affermando che tale tavola corrisponde all'uso del "se ..., allora ..." che si adotta nel ragionamento matematico. Vediamo perché. È noto che la stragrande maggioranza dei teoremi di matematica hanno proprio la forma "se A, allora B". Per dimostrare la verità di "se A, allora B" si accetta di poter procedere "per assurdo". Si suppone che il teorema sia falso (cioè che "se A, allora B" abbia valore **F**) e si pone che allora A (l'ipotesi) è vera e B (la tesi) è falsa. Dopo di che si deduce un assurdo. Allora si conclude che il teorema è vero. Si assume quindi che l'unico caso[5] in cui "se A, allora B" ha valore **F** è quando A ha valore **V** e B ha valore **F** (come è sancito nella tavola di $\rightarrow$).

A ulteriore riprova della adeguatezza della tavola di $\rightarrow$, consideriamo la proposizione aritmetica: "*per ogni x e per ogni y, se x è divisore di y, allora x è divisore di $2y$*".

Essa è vera nei numeri naturali, quindi devono essere veri tutti i suoi casi particolari (ottenuti sostituendo numeri al posto delle variabili x e y); sono quindi vere:

$$\textit{se } 3 \textit{ è divisore di } 9, \textit{ allora } 3 \textit{ è divisore di } 18 \tag{2.2}$$
$$\textit{se } 6 \textit{ è divisore di } 9, \textit{ allora } 6 \textit{ è divisore di } 18 \tag{2.3}$$
$$\textit{se } 5 \textit{ è divisore di } 9, \textit{ allora } 5 \textit{ è divisore di } 18 \tag{2.4}$$

(il condizionale ha valore **V** quando antecedente e conseguente hanno valore **V** (2.2), quando l'antecedente ha valore **F** e il conseguente **V** (2.3) e quando l'antecedente ha valore **F** e il conseguente **F** (2.4)).

La situazione che si registra nel ragionamento matematico (in cui il "se A, allora B" si traduce con il condizionale materiale $\rightarrow$) non si realizza in genere nel linguaggio comune. Nelle due proposizioni: "*Se Marco pesa 220 Kg, allora Marco pesa più di due quintali*" e "*Se Marco pesa 220 Kg, allora Marco pesa meno di 2 Kg*" l'antecedente e i conseguenti sono tutti falsi (se Marco ha un peso normale, ad esempio di 70 Kg), ma la prima proposizione è vera e la seconda falsa.

[5] Se il "se A, allora B" fosse falso in altri casi, il ragionamento per assurdo dovrebbe contemplarli tutti. Il fatto che si accetti di esaminarne uno solo conferma che si adotta la tavola di verità del condizionale materiale.

In: "*Se Marco pesa 220 Kg, allora Marco pesa meno di due quintali*" e "*Se Marco pesa 220 Kg, allora Marco pesa più di 2 Kg*" l'antecedente è falso e i conseguenti sono veri, ma la prima proposizione è falsa e la seconda vera.

Nei ragionamenti ordinari, quindi, si possono verificare situazioni in (apparente) contraddizione con la trattazione precedente.

Se traducessimo l'affermazione: "*Se nel pomeriggio pioverà, allora non annaffierò l'orto*" con $(p \to \neg q)$, potremmo dedurne logicamente $(q \to \neg p)$, cioè: "*Se annaffierò l'orto, allora non pioverà nel pomeriggio*", il che è palesemente assurdo.

Si potrebbero moltiplicare gli esempi che evidenziano come gli usi del "se ..., allora ..." nel linguaggio comune siano spesso dissimili dal comportamento del condizionale materiale[6]. Sono stati considerati "paradossi" dell'implicazione materiale la validità di $A \to (B \to A)$ (per cui se A è una tesi, è implicata da qualsiasi B, anche se questa non ha alcun ruolo per stabilire A) e di $\neg A \to (A \to B)$ (che sancisce che da una falsità segue qualsiasi proposizione)[7].

Nei ragionamenti condotti nel linguaggio comune, non sempre vale la proprietà di monotonia, ossia, se aumentano le premesse, possono mutare le conseguenze. Ad esempio si può accettare che: "*Se il motore di destra non funziona, allora il pilota tenta un atterraggio di fortuna*", ma può essere falso: "*Se il motore di destra non funziona e il motore di sinistra è in fiamme, allora il pilota tenta un atterraggio di fortuna*" (con tutti i motori in avaria non si può tentare un atterraggio di fortuna, ma conviene lanciarsi col paracadute), contro il fatto che, se vale $p \to q$, allora vale anche $p \wedge r \to q$[8].

Aggiungiamo ancora che, molto spesso, nel linguaggio comune il "se ..., allora ..." viene impiegato con il significato di "se e solo se". Quando dico ad un amico: "*Se oggi fa bello, allora vengo a trovarti*", egli mi aspetta "se e solo se" fa bello.

Terminiamo questa appendice con alcune precisazioni sull'impiego del condizionale e del bicondizionale nel linguaggio comune, soprattutto in quello matematico.

Anzitutto, al posto di "se A, allora B", si usano spesso:

"Se A, B"
"B, se A"
"A solo se B"
"B, supposto che A"
"L'ipotesi A implica la tesi B"
ecc.

Se si ricorda la tavola di verità del condizionale, se il condizionale è vero ed è vero A, allora è vero anche B, si giustifica l'uso di: "A è condizione sufficiente per B" "B è condizione necessaria per A"

Anche la locuzione:

"solo se B, allora A"

è un modo per esprimere che B è condizione necessaria per A.

Il bicondizionale "A se e solo se B" equivale a "se A, allora B" e "se B, allora A". Si osservi che, in "A se e solo se B", il primo "se" ("A se B") indica il secondo condizionale ("se B, allora A"), mentre il "solo se" indica il primo condizionale ("se A, allora B").

"A se e solo se B", essendo la congiunzione delle due proposizioni "A è condizione necessaria

---

[6]Esiste un ampio settore della logica, la *logica condizionale*, nel quale si cercano, tra l'altro, delle formalizzazioni più adeguate del "se ..., allora ..." come utilizzato nei ragionamenti ordinari, in cui non è sufficiente l'aspetto vero-funzionale, ma piuttosto l'ipotetica verità dell'antecedente è un elemento della spiegazione della ipotetica verità del conseguente e, inoltre, viene affrontata la dibattuta problematica dei *condizionali controfattuali* (con antecedente falso).

[7]Nel settore delle *logiche della rilevanza* si introducono e si studiano dei calcoli logici che non incorrono nei paradossi dell'implicazione materiale.

[8]Il fatto che il ragionamento comune abbia questa caratteristica per cui, al crescere delle informazioni disponibili, variano le conseguenze, è all'origine dell'enorme sviluppo, in tempi recenti, nel campo dell'Intelligenza Artificiale (dove si vuole riprodurre automaticamente il comportamento intelligente dell'uomo), del settore delle *logiche non monotòne*.

per B" ("se B, allora A") e "A è condizione sufficiente per B" ("se A, allora B"), si può esprimere anche con:

"A è condizione necessaria e sufficiente per B"
"Condizione necessaria e sufficiente affinché B è A"

A differenza del condizionale, il bicondizionale è commutativo, per cui le precedenti locuzioni equivalgono anche a:

"B è condizione necessaria e sufficiente per A"
"Condizione necessaria e sufficiente affinché A è B"

in cui la condizione necessaria è il condizionale "se A, allora B" e la condizione sufficiente è "se B, allora A".

Quando vale il condizionale "se A, allora B", ma non vale il condizionale inverso ("se B, allora A"), per sottolineare la dissimmetria che si instaura fra le proposizioni A e B, si dice talvolta:

"A è condizione sufficiente, ma non necessaria, per B"
"B è condizione necessaria, ma non sufficiente, per A".

Capitolo 3

Il Metodo degli Alberi Semantici

3.1 Introduzione

Si è osservato in precedenza come il procedimento per decidere se una fp A è una tautologia (oppure se è conseguenza logica di un insieme finito X di fp) basato sulla compilazione della tavola di verità sia laborioso e cresca esponenzialmente all'aumentare del numero delle lettere proposizionali presenti in A (e in X). Una alternativa spesso vantaggiosa consiste, come già illustrato nel Capitolo 2, nella ricerca di un controesempio.

Esempio 3.1.1 Supponiamo di voler stabilire se la fp:

$$A = p \wedge (q \to r) \to (q \to p \wedge r)$$

è o non è una tautologia. Se esiste una valutazione v per la quale $v(A) = \mathbf{F}$, allora, essendo A un condizionale, per la definizione di valutazione booleana, si ha: $v(p \wedge (q \to r)) = \mathbf{V}$ e $v(q \to p \wedge r) = \mathbf{F}$.

Da quest'ultima condizione, per le stesse ragioni, segue che $(q) = \mathbf{V}$ e $v(p \wedge r) = \mathbf{F}$, mentre dalla prima, trattandosi di una congiunzione, si ottiene che $v(p) = \mathbf{V}$ e $v(q \to r) = \mathbf{V}$. Da $v(p) = \mathbf{V}$ e $v(p \wedge r) = \mathbf{F}$, segue $v(r) = \mathbf{F}$. Ora, le tre condizioni ottenute: $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$, $v(q \to r) = \mathbf{V}$ non possono sussistere simultaneamente (se $v(q) = \mathbf{V}$ e $v(r) = \mathbf{F}$, allora $v(q \to r) = \mathbf{F}$), anche se conseguono dall'ipotesi iniziale $v(A) = \mathbf{F}$. Ciò significa che, per nessuna v, può essere $v(A) = \mathbf{F}$ e, quindi, che A è una tautologia. $\oplus$

Esempio 3.1.2 Ripetiamo il procedimento dell'Esempio 3.1.1 con la fp:

$$B = (p \to q \vee r) \to (q \to p \vee r)$$

Se $v(B) = \mathbf{F}$, allora $v(p \to q \vee r) = \mathbf{V}$ e $v(q \to p \vee r) = \mathbf{F}$. Dall'ultima condizione segue $v(q) = \mathbf{V}$ e $v(p \vee r) = \mathbf{F}$. Da $v(p \vee r) = \mathbf{F}$ si ottiene $v(p) = \mathbf{F}$ e $v(r) = \mathbf{F}$.

Ora, se $v(p) = \mathbf{F}$, si ha proprio $v(p \to q \vee r) = \mathbf{V}$ e non si è raggiunta alcuna contraddizione. Pertanto, una valutazione per la quale $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$ è tale che $v(B) = \mathbf{F}$, e pertanto B non è una tautologia (è falsa per almeno una valutazione). Nella ricerca del controesempio non siamo pervenuti ad una contraddizione, ma a individuarlo, cioè a costruire una valutazione che, rendendo falsa la fp in esame, consente di concludere che essa non è una tautologia. $\oplus$

Esempio 3.1.3 Supponiamo di voler stabilire se la fp $A = q \vee s$ è conseguenza logica dell'insieme di fp $X = \{p \to q, r \to s, p \vee r\}$.

Il metodo della tavola di verità comporterebbe la considerazione di 16 casi. Procediamo invece alla ricerca di un controesempio. Se A non è conseguenza logica di X, deve esistere una valutazione v che rende vere le fp di X e falsa A:

$$v(p \to q) = \mathbf{V}, v(r \to s) = \mathbf{V}, v(p \vee r) = \mathbf{V}, v(q \vee s) = \mathbf{F}$$

Dall'ultima condizione segue $v(q) = \mathbf{F}$ e $v(s) = \mathbf{F}$.
Da $v(q) = \mathbf{F}$ e $v(p \to q) = \mathbf{V}$, segue $v(p) = \mathbf{F}$.
Analogamente, da $v(s) = \mathbf{F}$ e $v(r \to s) = \mathbf{V}$, segue $v(r) = \mathbf{F}$.
Ma $v(p) = \mathbf{F}$ e $v(r) = \mathbf{F}$ sono in contraddizione con $v(p \vee r) = \mathbf{V}$.

Quindi, non può esistere una valutazione che rende vere le premesse e falsa la conclusione, e pertanto ogni valutazione che rende vere le fp di X rende vera anche A, per cui $X \models A$, ossia:

$$p \to q, r \to s, p \vee r \models q \vee s$$

$\oplus$

Esempio 3.1.4 Verificare se:

$$p \to (q \to r), p \to \neg q \models p \to r$$

Procedendo come nell'esempio precedente vediamo se può esistere una v tale che:

$$v(p \to (q \to r)) = \mathbf{V}, v(p \to \neg q) = \mathbf{V} \text{ e } v(p \to r) = \mathbf{F}$$

Dall'ultima condizione segue $v(p) = \mathbf{V}$ e $v(r) = \mathbf{F}$.
Da $v(p) = \mathbf{V}$ e $v(p \to \neg q) = \mathbf{V}$, segue $v(\neg q) = \mathbf{V}$ e, quindi, $v(q) = \mathbf{F}$.
Queste condizioni non contraddicono $v(p \to (q \to r)) = \mathbf{V}$.

Quindi, se $v(p) = \mathbf{V}$, $v(q) = \mathbf{F}$ e $v(r) = \mathbf{F}$ le premesse hanno valore $\mathbf{V}$ e la conclusione ha valore $\mathbf{F}$. Quindi il nesso di conseguenza logica non sussiste. $\oplus$

In questo capitolo intendiamo raffinare questo metodo di ricerca del controesempio riconducendolo all'applicazione di un sistema di regole che ci consentano di pervenire a stabilire se la fp data A è o non è una tautologia, o se è o non è conseguenza logica di un insieme X di fp. Mediante queste regole, come vedremo fra breve, si costruisce una struttura ad albero, detta *albero semantico*, che consente di risolvere questo tipo di problemi.

Ricordiamo che, come già evidenziato nell'Osservazione 1 del §2.3 del Cap. 2, l'essere A conseguenza logica di un insieme finito X è equivalente all'essere una tautologia la fp condizionale che ha come antecedente la congiunzione delle fp di X e come conseguente A. Pertanto, la seconda questione, quella relativa alla conseguenza logica, può essere ricondotta alla prima, relativa all'essere una tautologia, per cui l'algoritmo di costruzione dell'albero semantico sarà inizialmente finalizzato al problema della decisione di quest'ultimo problema.

3.2 Il metodo dell'albero semantico

Ricordiamo che, rispetto ad una qualsiasi valutazione, si verifica quanto segue:

1a)	se $\neg A$ è vera,	allora A è falsa
1b)	se $\neg A$ è falsa,	allora A è vera
2a)	se $A \wedge B$ è vera,	allora A e B sono entrambe vere
2b)	se $A \wedge B$ è falsa,	allora A è falsa oppure B è falsa
3a)	se $A \vee B$ è vera,	allora A è vera oppure B è vera
3b)	se $A \vee B$ è falsa,	allora A e B sono entrambe false
4a)	se $A \to B$ è vera,	allora A è falsa oppure B è vera
4b)	se $A \to B$ è falsa,	allora A è vera e B è falsa

Convenzione notazionale. Nella costruzione dell'albero semantico useremo espressioni del tipo V[A] e F[A], dove A è una fp. Esse prendono il nome di *fp segnate* e si leggono rispettivamente "A è vera" e "A è falsa". Si stipula poi che, in base ad una valutazione v, si abbia:

$$v \models \mathrm{V}[A] \Longleftrightarrow v(A) = \mathbf{V}$$
$$v \models \mathrm{F}[A] \Longleftrightarrow v(A) = \mathbf{F}$$

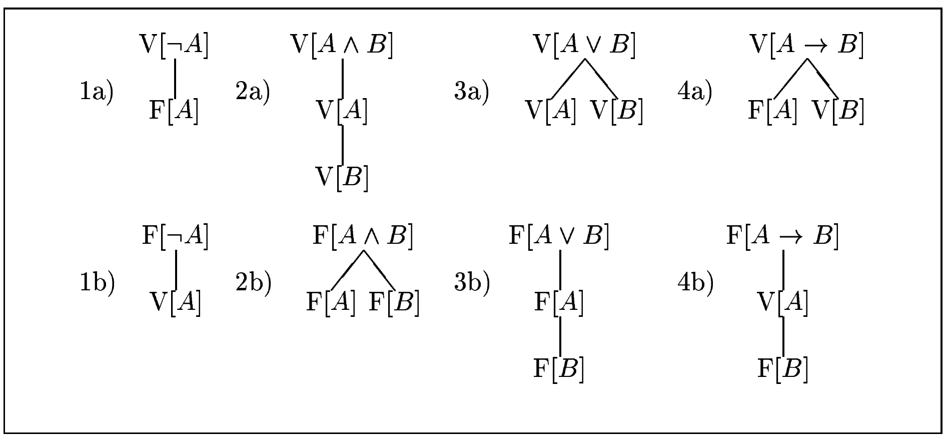
(quindi V[A] si comporta come A e F[A] si comporta come $\neg A$; alle fp segnate si può estendere la nomenclatura relativa alle fp (che compaiono nelle parentesi quadre). Data la fp segnata V[A], F[A] è la sua *coniugata* e viceversa.

Regole per la costruzione dell'albero semantico

L'albero semantico è un albero nei cui nodi figurano fp segnate. Sfruttando il teorema di decomposizione unica e quanto richiamato all'inizio del paragrafo possiamo esprimere in forma schematica le regole per la costruzione dell'albero. Esse sono otto e sono in corrispondenza con le 1a)–4b) precedenti (due per ogni connettivo: una per la fp segnata con V e l'altra per la fp segnata con F) e ciascuna di esse indica quali sono i nodi successori, o *conseguenze*, che vanno posti nei rami che contengono il nodo in alto. Per cinque di esse, che chiamiamo *regole del I tipo*, e cioè 1a), 2a), 1b), 3b) e 4b), vi sono solo successori diretti (uno per 1a) e la 1b) e due per le altre), ossia ciascun ramo contenente il nodo in alto viene prolungato con le sue conseguenze. Applicando le altre tre, che chiamiamo *regole del II tipo*, e cioè 3a), 4a) e 2b), l'albero subisce una biforcazione, ossia ciascun ramo che contiene il nodo in alto viene diviso in due rami in ciascuno dei quali si pone una delle due conseguenze.

Le otto regole sono:

Tavola 1



La costruzione dell'albero avviene induttivamente sviluppando i rami. Un ramo è detto *aperto* se non contiene una fp segnata e la sua coniugata, e *chiuso* altrimenti (si ricordi che, per definizione, un ramo parte sempre dalla radice e finisce in una foglia, ossia la radice è comune a tutti i rami).

Il passo dell'induzione è il seguente. Supponiamo di aver già costruito l'albero Π. Se tutti nodi presenti nei rami aperti contengono solo lettere proposizionali o sono contrassegnati il *procedimento termina*. Se, invece, vi è almeno un nodo in un ramo aperto che non è stato ancora contrassegnato e che contiene una fp composta (e quindi che è di uno degli otto tipi cui è applicabile una regola della Tavola 1), si prolungano tutti i rami aperti di Π che passano per il nodo aggiungendo i successori del nodo come prescritto dalla rispettiva regola. Si *contrassegna* il nodo esaminato e si chiudono i rami nei quali compare una fp segnata e la sua coniugata. Se tutti i rami sono chiusi il *procedimento termina* e l'albero è detto *chiuso*. In caso contrario all'albero Π' così ottenuto (detto un *successore immediato* di Π) si può riapplicare il passo.

La base dell'induzione dipende dal tipo di problema che si intende affrontare. Nel caso che esaminiamo per primo, cioè *il problema di decidere se una fp A è o non è una tautologia*, l'albero iniziale è costituito dal solo nodo F[A].

Il procedimento è più semplice di quanto possa apparire dalla sua descrizione. Illustriamolo mediante qualche esempio. Come contrassegno usiamo il simbolo *.

Esempio 3.2.1 Applichiamo il procedimento di costruzione dell'albero semantico alla fp A dell'Esempio 3.1.1 del paragrafo precedente:

$$A = p \wedge (q \to r) \to (q \to p \wedge r)$$

L'albero iniziale è:

$$\mathrm{F}[p \wedge (q \to r) \to (q \to p \wedge r)]$$

Ad esso si può applicare la regola 4b) e si ottiene:

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[p \wedge (q \to r) \to (q \to p \wedge r)]^* \\ | \\ \mathrm{V}[p \wedge (q \to r)] \\ | \\ \mathrm{F}[q \to p \wedge r] \end{array}$$

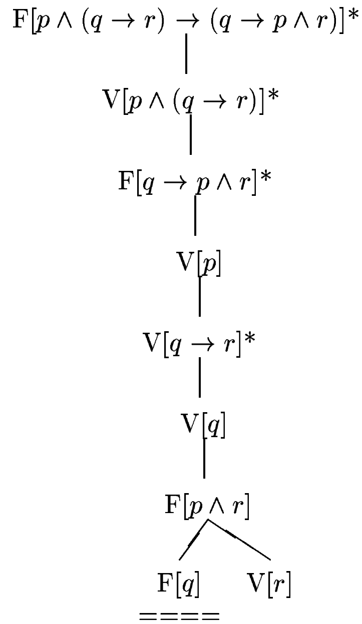
Vi sono due nodi da esaminare. In genere conviene scegliere, se possibile, uno di quelli ai quali si applica una regola che non produce biforcazione, ossia una regola del I tipo. In questo caso entrambi hanno questa caratteristica e allora scegliamo, ad esempio, il più vicino alla radice, al quale si applica la regola 2a):

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[p \wedge (q \to r) \to (q \to p \wedge r)]^* \\ | \\ \mathrm{V}[p \wedge (q \to r)]^* \\ | \\ \mathrm{F}[q \to p \wedge r] \\ | \\ \mathrm{V}[p] \\ | \\ \mathrm{V}[q \to r] \end{array}$$

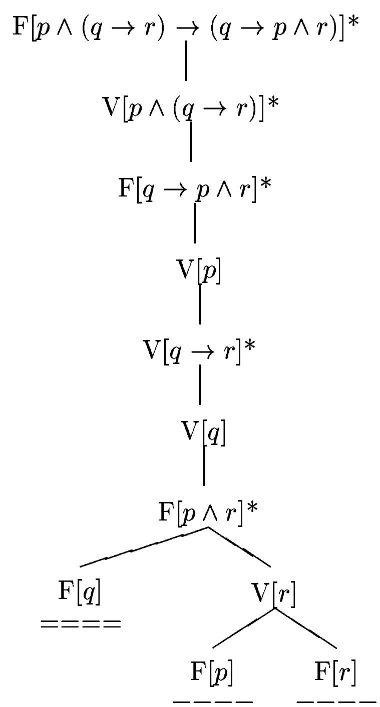
Il nodo V[p] è di quelli ai quali non si può applicare alcuna regola. Tra i due ancora da esaminare, F[$q \to p \wedge r$] e V[$q \to r$], è preferibile il primo al quale si applica una regola del I tipo:

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[p \wedge (q \to r) \to (q \to p \wedge r)]^* \\ | \\ \mathrm{V}[p \wedge (q \to r)]^* \\ | \\ \mathrm{F}[q \to p \wedge r]^* \\ | \\ \mathrm{V}[p] \\ | \\ \mathrm{V}[q \to r] \\ | \\ \mathrm{V}[q] \\ | \\ \mathrm{F}[p \wedge r] \end{array}$$

A entrambi i nodi che contengono fp composte e non ancora contrassegnati (e cioè V[$q \to r$] e F[$p \wedge r$]) va applicata una regola del II tipo, per cui scegliamo, ad esempio, quello più vicino alla radice, cioè V[$q \to r$]:



L'applicazione della regola del II tipo comporta una biforcazione: nell'albero sono ora presenti due foglie e quindi due rami (si ricordi sempre che il ramo, per definizione, parte sempre dalla radice e arriva a una foglia). Il ramo di sinistra contiene V[q] e F[q], e quindi si chiude (e allora non viene più prolungato: intuitivamente ad esso corrisponde una possibilità di sviluppo che si rivela contraddittoria). Indichiamo la chiusura del ramo con ====. Nel ramo di destra vi è ancora un nodo esaminabile, e cioè F[$p \wedge r$]. Procediamo quindi con la relativa regola 2b):



Si determinano altri due rami che si chiudono entrambi (quello più a destra perché contiene V[r] e F[r], quello più a sinistra perché contiene V[p] e F[p]). Il procedimento termina perché tutti i rami sono chiusi. L'albero è chiuso. Ciò significa che la ricerca del controesempio fallisce, ossia non si può soddisfare la radice, quindi A non può essere falsa , e allora è una tautologia. $\oplus$

Esempio 3.2.2 Ripetiamo il procedimento con la fp considerata nell'Esempio 3.1.2 del paragrafo introduttivo:

$$B = (p \to q \vee r) \to (q \to p \vee r)$$

Si parte da:

$$\mathrm{F}[(p \to q \vee r) \to (q \to p \vee r)]$$

e si ha, per la regola 4b):

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[(p \to q \vee r) \to (q \to p \vee r)]^* \\ | \\ \mathrm{V}[p \to q \vee r] \\ | \\ \mathrm{F}[q \to p \vee r] \end{array}$$

Esaminiamo prima l'ultimo nodo (cui si applica una regola del I tipo):

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[(p \to q \vee r) \to (q \to p \vee r)]^* \\ | \\ \mathrm{V}[p \to q \vee r] \\ | \\ \mathrm{F}[q \to p \vee r]^* \\ | \\ \mathrm{V}[q] \\ | \\ \mathrm{F}[p \vee r] \end{array}$$

Per la stessa ragione esaminiamo di nuovo prima l'ultimo nodo:

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[(p \to q \vee r) \to (q \to p \vee r)]^* \\ | \\ \mathrm{V}[p \to q \vee r] \\ | \\ \mathrm{F}[q \to p \vee r]^* \\ | \\ \mathrm{V}[q] \\ | \\ \mathrm{F}[p \vee r]^* \\ | \\ \mathrm{F}[p] \\ | \\ \mathrm{F}[r] \end{array}$$

Resta ora da esaminare $\mathrm{V}[p \to q \vee r]$:

$$\mathrm{F}[(p \to q \vee r) \to (q \to p \vee r)]^*$$
$$\mathrm{V}[p \to q \vee r]^*$$
$$\mathrm{F}[q \to p \vee r]^*$$
$$\mathrm{V}[q]$$
$$\mathrm{F}[p \vee r]^*$$
$$\mathrm{F}[p]$$
$$\mathrm{F}[r]$$
$$\mathrm{F}[p] \quad \mathrm{V}[q \vee r]$$

A questo punto si può osservare che nel ramo a sinistra tutti i nodi sono stati esaminati e il ramo non si è chiuso. Questo è sufficiente per concludere che la ricerca del controesempio ha dato esito favorevole: anche se si prolunga il ramo di destra l'albero non potrà mai chiudersi (in quanto sul ramo di sinistra non si esegue alcun altro intervento e rimane aperto anche negli alberi successivi). La fp B non è una tautologia. A titolo di esercizio proseguiamo nel ramo di destra dove vi è ancora da esaminare il nodo $\mathrm{V}[q \vee r]$; si ottiene:

$$\mathrm{F}[(p \to q \vee r) \to (q \to p \vee r)]^*$$
$$\mathrm{V}[p \to q \vee r]^*$$
$$\mathrm{F}[q \to p \vee r]^*$$
$$\mathrm{V}[q]$$
$$\mathrm{F}[p \vee r]^*$$
$$\mathrm{F}[p]$$
$$\mathrm{F}[r]$$
$$\mathrm{F}[p] \qquad \mathrm{V}[q \vee r]^*$$
$$\mathrm{V}[q] \qquad \mathrm{V}[r]$$
$$====$$

Il ramo più a destra si chiude (contiene $\mathrm{F}[r]$ e $\mathrm{V}[r]$) e vi è un ulteriore ramo che non si chiude. A questo punto il procedimento termina in quanto tutti nodi (salvo quelli che contengono lettere proposizionali) sono stati contrassegnati.

Si può osservare come, in corrispondenza di un ramo aperto, ad esempio quello più a sinistra, se si considerano i nodi che contengono le lettere proposizionali, essi ci indicano una valutazione (quella per cui $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{F}$) che rende falsa B. Il procedimento, quindi, non solo ci dice se la fp esaminata è una tautologia (se l'albero si chiude) o se non lo è (se rimane almeno un ramo aperto), ma in quest'ultimo caso ci consente di determinare delle valutazioni che falsificano la fp. Anzi, se si prosegue fino al termine del lavoro, si ottengono tutte le valutazioni che la falsificano (e, quindi, per differenza, quelle che la rendono vera), per cui si hanno le stesse informazioni della tavola di verità. $\oplus$

Esempio 3.2.3 Verificare se la fp:

$$A = (((p \to (q \to r \lor s)) \land p) \land \neg r) \to (\neg s \to \neg q)$$

è o non è una tautologia.

Questa volta presentiamo già l'albero semantico interamente sviluppato (i numeri alla destra dei nodi dell'albero servono per identificare i nodi stessi nella spiegazione seguente):

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}[(((p \to (q \to r \lor s)) \land p) \land \neg r) \to (\neg s \to \neg q)]^*(1)\\
|\\
\mathrm{V}[((p \to (q \to r \lor s)) \land p) \land \neg r]^*(2)\\
|\\
\mathrm{F}[\neg s \to \neg q]^*(3)\\
|\\
\mathrm{V}[(p \to (q \to r \lor s)) \land p]^*(4)\\
|\\
\mathrm{V}[\neg r]^*(5)\\
|\\
\mathrm{F}[r]\ (6)\\
|\\
\mathrm{V}[p \to (q \to r \lor s)]^*(7)\\
|\\
\mathrm{V}[p]\ (8)\\
|\\
\mathrm{V}[\neg s]^*(9)\\
|\\
\mathrm{F}[\neg q]^*(10)\\
|\\
\mathrm{F}[s]\ (11)\\
|\\
\mathrm{V}[q]\ (12)
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\mathrm{F}[p]\ (13) & & \mathrm{V}[q \to r \lor s]^*(14) & \\
==== & & & \\
 & \mathrm{F}[q]\ (15) & & \mathrm{V}[r \lor s]^*(16)\\
 & ==== & & \\
 & & \mathrm{V}[r]\ (17) & \mathrm{V}[s]\ (18)\\
 & & ==== & ====
\end{array}$$

Spiegazione. Dalla (1) seguono la (2) e la (3) per la regola 4b) e si contrassegna la (1); dalla (2), che si contrassegna, seguono la (4) e la (5) per la regola 2a); esaminiamo prima la (5) che si contrassegna, e si ottiene la (6) in base alla regola 1a); dalla (4), che si contrassegna, si ottengono, per la regola 2a), la (7) e la (8). A questo punto restano da esaminare i nodi (3) e (7). Esaminiamo il primo al quale si applica una regola del I tipo: contrassegniamo la (3) e otteniamo i nodi (9) e (10) che esaminiamo subito, e contrassegniamo, ottenendo i nodi (11) e (12). Resta da esaminare il nodo (7), al quale si applica la regola 4a): si contrassegna il nodo (7) e si ottengono i nodi (13) e (14) con la biforcazione dell'albero. Il ramo a sinistra si chiude (i nodi (8) e (13) sono coniugati). Nel ramo a destra si esamina il nodo (14) che si contrassegna e dal quale si ottengono con biforcazione dell'albero i nodi (15) e (16) per la regola 4a). Il ramo che termina in (15) si chiude (i nodi (15) e (12) sono coniugati). Nell'altro si esamina il nodo (16) al quale si applica la regola 3a) e si ottengono, con biforcazione, i nodi (17) e (18). Entrambi i rami si chiudono (sono coniugati i nodi (17) e (6), e i nodi (18) e (11)). L'albero è chiuso. Quindi A è una tautologia. $\oplus$

Esempio 3.2.4 Si verifichi con il metodo dell'albero semantico che la fp:

$$A = \neg(p \land q \to r) \to (q \lor \neg(p \land q))$$

è una tautologia[1].

Presentiamo solo l'albero semantico lasciando al lettore il compito di giustificare lo sviluppo[2]:

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}[\neg(p \land q \to r) \to (q \lor \neg(p \land q))]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\neg(p \land q \to r)]^* \\
| \\
\mathrm{F}[q \lor \neg(p \land q)]^* \\
| \\
\mathrm{F}[p \land q \to r] \\
| \\
\mathrm{F}[q] \\
| \\
\mathrm{F}[\neg(p \land q)]^* \\
| \\
\mathrm{V}[p \land q]^* \\
| \\
\mathrm{V}[p] \\
| \\
\mathrm{V}[q] \\
====
\end{array}$$

L'albero si chiude; quindi la fp A è una tautologia. $\oplus$

Osservazione 1. Si potrebbe dimostrare rigorosamente che il procedimento di costruzione dell'albero termina sempre dopo un numero finito di passi. Ciò è abbastanza ovvio intuitivamente se si considera che, dopo l'applicazione di ogni regola, restano da esaminare nodi contenenti fp di complessità minore. Le varie fp, quindi, vengono ridotte a loro sottoformule fino a giungere eventualmente alle lettere proposizionali, ossia a formule di complessità 1.

Esempio 3.2.5 Si verifichi che la fp:

[1] Cfr. Esempio 2.2.1, Cap. 2, §2.2.

[2] Si tenga presente che il procedimento non è deterministico per cui, se lo studente sviluppa da sé l'albero, può ottenerne uno diverso (se esamina i nodi in un altro ordine). Tuttavia, qualsiasi sia il percorso seguito, come dimostreremo più avanti, se l'albero si chiude seguendo un certo sviluppo, si chiude in qualsiasi altro sviluppo.

$$C = (p \to \neg r) \wedge (q \to \neg r)$$

non è una tautologia.

L'albero risulta:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathrm{F}[(p \to \neg r) \wedge (q \to \neg r)]\ * & \\
\swarrow & & \searrow \\
\mathrm{F}[p \to \neg r]\ * & & \mathrm{F}[q \to \neg r]\ * \\
| & & | \\
\mathrm{V}[p] & & \mathrm{V}[q] \\
| & & | \\
\mathrm{F}[\neg r]\ * & & \mathrm{F}[\neg r]\ * \\
| & & | \\
\mathrm{V}[r] & & \mathrm{V}[r]
\end{array}$$

L'albero rimane aperto; la fp C non è una tautologia. Il ramo aperto di sinistra consente di dedurre che nelle valutazioni in cui p e r sono vere, C è falsa (qualsiasi sia il valore di q), ossia C è falsa se:

$$v(p) = \mathbf{V}, v(q) = \mathbf{V}, v(r) = \mathbf{V} \text{ oppure } v(p) = \mathbf{V}, v(q) = \mathbf{F}, v(r) = \mathbf{V}$$

Analogamente, dall'altro ramo aperto si deduce che C è falsa se sono vere q e r (indipendentemente dal valore di p), ossia C è falsa se:

$$v(p) = \mathbf{V}, v(q) = \mathbf{V}, v(r) = \mathbf{V} \text{ (come prima) oppure: } v(p) = \mathbf{F}, v(q) = \mathbf{V}, v(r) = \mathbf{V}$$

Si sono così determinate le tre righe della tavola di verità in cui C ha valore $\mathbf{F}$, e quindi C è vera nelle interpretazioni corrispondenti alle altre cinque righe. $\oplus$

Osservazione 2. Come si è già visto nell'Osservazione 1, §2.3 del Cap. 2, la verifica della conseguenza logica da un insieme finito di fp equivale a quella di una tautologia: $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \models B \Longleftrightarrow \models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \to B$.

D'altra parte, l'albero semantico che ha come radice $\mathrm{F}[A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \to B]$ si sviluppa nel modo seguente:

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}[A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \to B]^* \\
| \\
\mathrm{V}[A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m]^* \\
| \\
\mathrm{F}[B] \\
| \\
\mathrm{V}[A_1] \\
| \\
\mathrm{V}[A_2] \\
| \\
\ldots \\
| \\
\mathrm{V}[A_m]
\end{array}$$

Si può allora adattare il procedimento di costruzione dell'albero semantico, come del resto è intuitivamente evidente, ponendo come base un primo segmento di ramo:

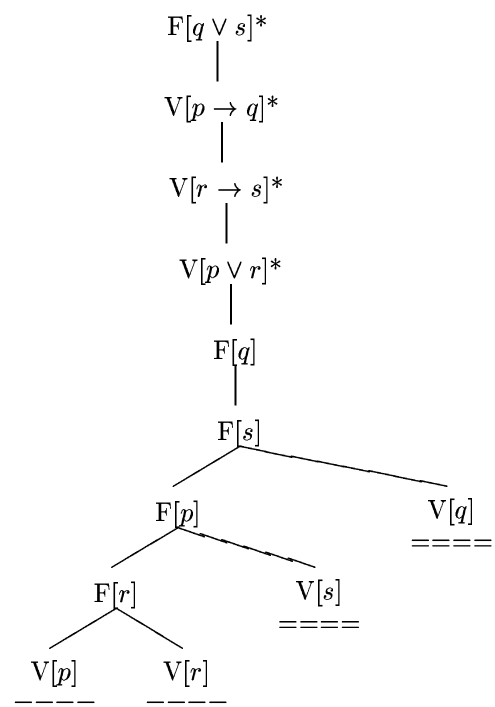
$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[B] \\ | \\ \mathrm{V}[A_1] \\ | \\ \mathrm{V}[A_2] \\ | \\ \dots \\ | \\ \mathrm{V}[A_m] \end{array}$$

ossia porre falsa la conclusione e vere le premesse, e poi procedere come negli esempi precedenti alla ricerca del controesempio. Se l'albero si chiude il controesempio non esiste e sussiste il nesso di conseguenza logica, mentre, se l'albero rimane aperto, il nesso di conseguenza logica non sussiste (e i rami aperti indicano le valutazioni rispetto alle quali le premesse sono vere e la conclusione è falsa). Vediamo come si procede negli esempi del paragrafo introduttivo.

Esempio 3.2.6 Verificare se:

$$p \to q, r \to s, p \vee r \models q \vee s$$

Lo sviluppo è il seguente:

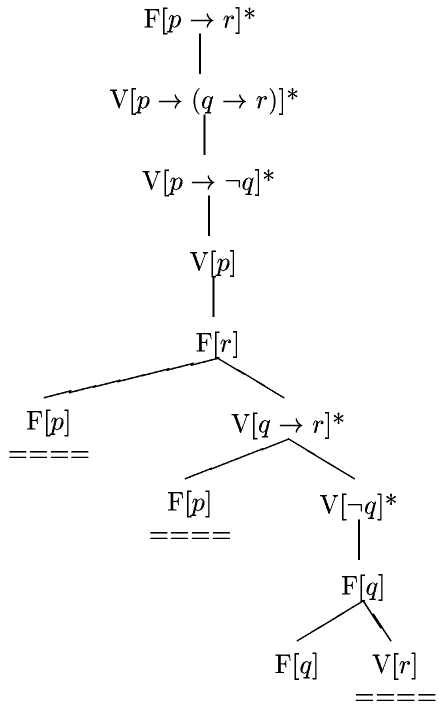


L'albero si chiude; pertanto $q \vee s$ è conseguenza logica di $X = \{p \to q, r \to s, p \vee r\}$. $\oplus$

Esempio 3.2.7 Verificare se:

$$p \to (q \to r), p \to \neg q \models p \to r$$

Procedendo come nell'esempio precedente si ottiene il seguente albero semantico:



In questo caso l'albero non si chiude. Ciò, come si è detto, significa che non sussiste il nesso di conseguenza logica. Se consideriamo l'unico ramo aperto (quello che ha come foglia F[q]), esso ci indica che la valutazione in cui p è vera, q è falsa e r è falsa rende vere le premesse e falsa la conclusione. $\oplus$

Esempio 3.2.8 Studiare, con il metodo dell'albero semantico, la correttezza del seguente ragionamento:

> *Se il triangolo T è rettangolo, allora almeno uno dei due triangoli T' e T'' è isoscele. Se T' è isoscele, allora T non è rettangolo. Se il quadrilatero Q è un rombo, allora il triangolo T'' non è isoscele. Quindi, se il triangolo T è rettangolo, allora il quadrilatero Q non è un rombo.*

Come si è già sottolineato in precedenza, questo tipo di problema va eseguito in due fasi. Prima occorre "tradurre" in $\mathcal{L}$ le proposizioni del linguaggio naturale che intervengono nel ragionamento.

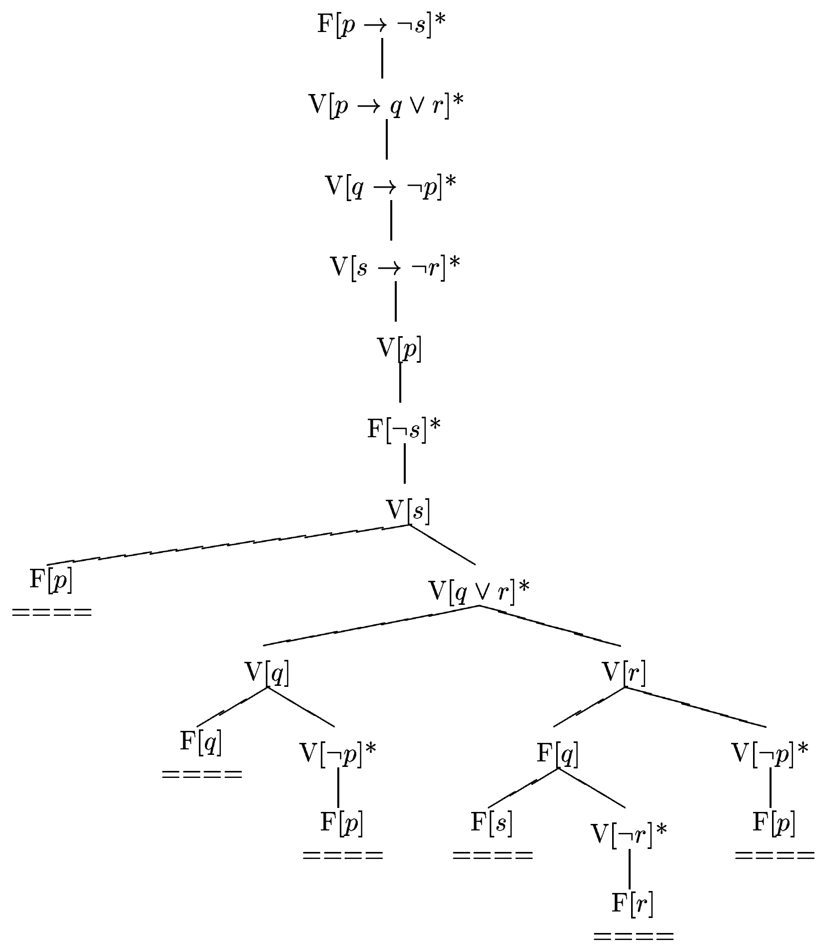
Ponendo:

p	=	"il triangolo T è rettangolo"
q	=	"il triangolo T' è isoscele"
r	=	"il triangolo T'' è isoscele"
s	=	"il quadrilatero Q è un rombo"

il problema diviene quello di vedere se sussiste o meno il seguente nesso di conseguenza logica:

$$p \to q \vee r, q \to \neg p, s \to \neg r \models p \to \neg s$$

L'albero semantico è il seguente:



Tutti i rami si chiudono, quindi l'albero è chiuso e, pertanto, sussiste il nesso di conseguenza logica. Il ragionamento è corretto. $\oplus$

Osservazione 3. Supponiamo di avere un insieme finito di fp $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$. Se sviluppiamo l'albero semantico il cui primo tratto è:

$$\begin{array}{c} \mathrm{V}[A_1] \\ | \\ \mathrm{V}[A_2] \\ | \\ \ldots \\ | \\ \mathrm{V}[A_m] \end{array}$$

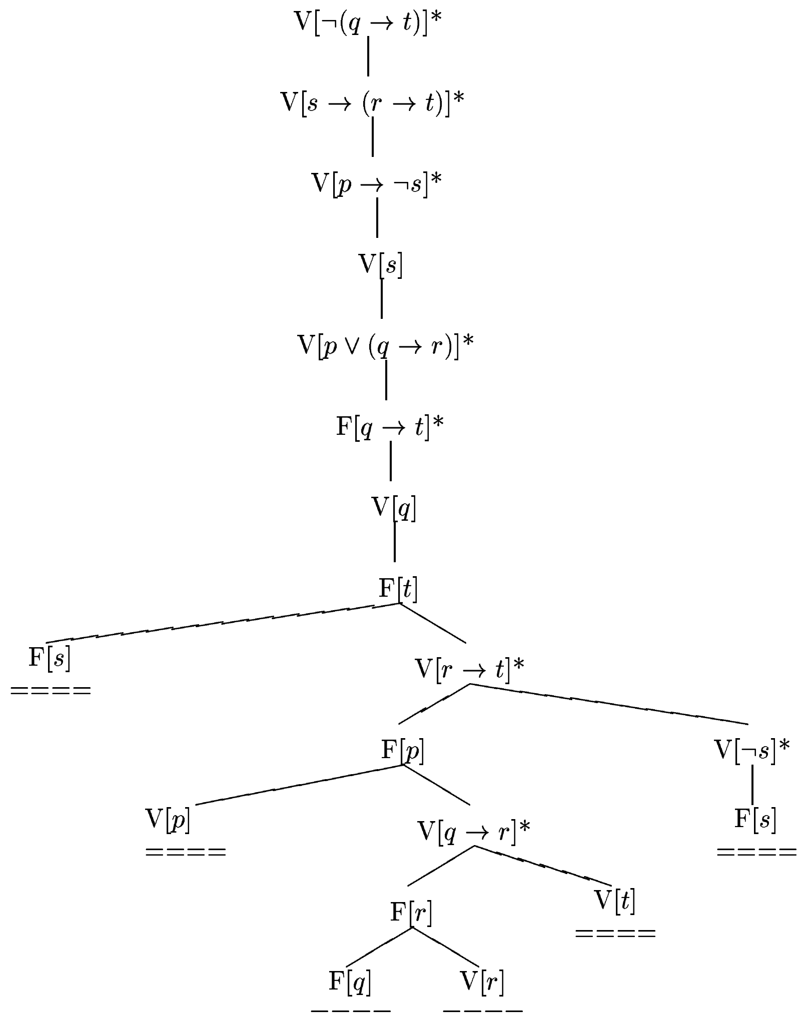
allora, se l'albero si chiude, significa che le fp di X non possono essere simultaneamente vere, cioè che X è *insoddisfacibile* (NonSod X). Invece, se l'albero, dopo aver eseguito tutti passaggi, non si chiude, allora X è *soddisfacibile* (Sod X) e in corrispondenza di ogni ramo aperto si può individuare una valutazione che rende vere tutte le fp di X.

Esempio 3.2.9 Determinare se l'insieme di fp:

$$X = \{\neg(q \to t), s \to (r \to t), p \to \neg s, s, p \vee (q \to r)\}$$

è soddisfacibile.

L'albero risulta:



L'albero si chiude, quindi l'insieme X non è soddisfacibile. Si controllino bene i passaggi dello sviluppo. Si provi poi a sviluppare l'albero variando l'ordine di esame dei nodi[3]. Inoltre, se si tengono presenti i Teoremi 2.4.4 e 2.4.5 del §2.4 del Cap. 2, un risultato di insoddisfacibilità può essere convertito in risultati relativi alla conseguenza logica (e viceversa). Quindi, ad esempio, dalla insoddisfacibilità di X segue che sussistono i seguenti nessi di conseguenza logica:

$$s \to (r \to t), p \to \neg s, s, p \vee (q \to r) \models q \to t$$
$$s \to (r \to t), p \to \neg s, p \vee (q \to r), \neg(q \to t) \models \neg s$$
$$s \to (r \to t), p \vee (q \to r), \neg(q \to t), s \models \neg(p \to \neg s)$$

$\oplus$

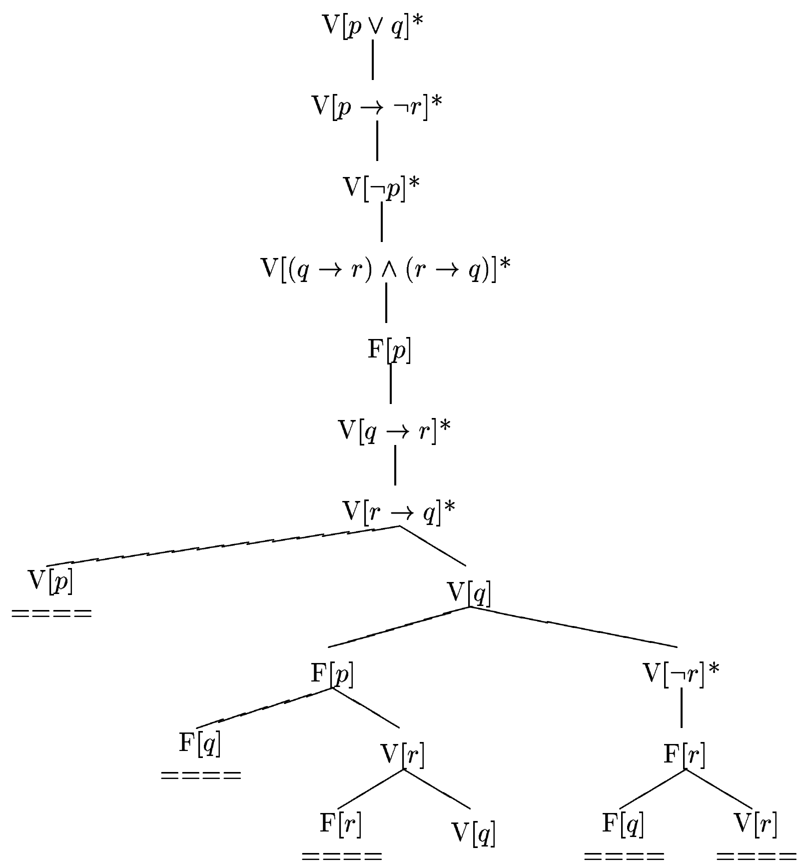
Esempio 3.2.10 Stabilire se l'insieme di fp:

$$X = \{p \vee q, p \to \neg r, \neg p, (q \to r) \wedge (r \to q)\}$$

[3]Noi abbiamo cercato uno sviluppo "breve". Cambiando l'ordine di esame dei nodi, lo sviluppo dell'albero cambia. Tuttavia, se non si commettono errori, alla fine l'albero deve chiudersi.

è soddisfacibile.

L'albero semantico è:



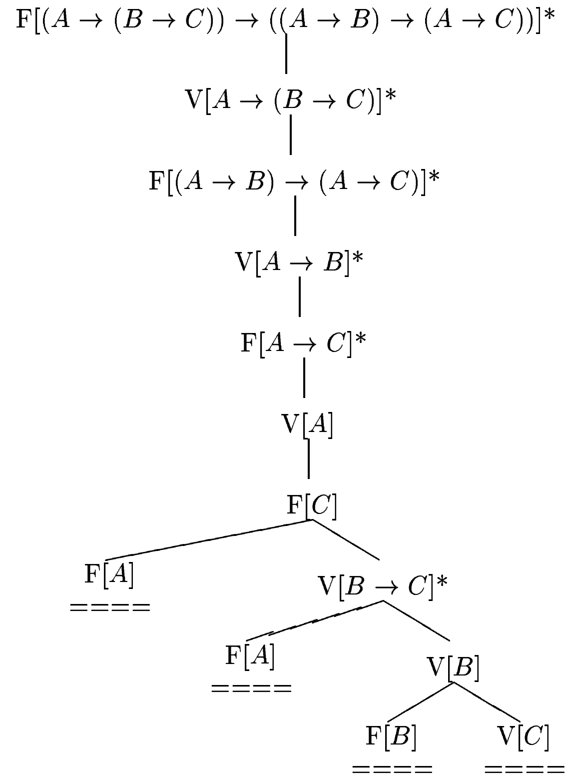
L'albero ha un ramo che rimane aperto. Quindi X è soddisfacibile. La valutazione associata all'unico ramo aperto (quello che ha V$[q]$ come foglia) è: $v(p) = \mathbf{F}$, $v(q) = \mathbf{V}$, $v(r) = \mathbf{V}$ e rende vere tutte le fp di X. $\oplus$

Esempio 3.2.11 Il metodo dell'albero semantico si può applicare, anziché a fp, a schemi di fp (ossia con metavariabili). L'espressione:

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

è uno schema: quando al posto di A, B e C si sostituiscono delle fp particolari si ottiene una fp.

Sviluppiamo il seguente albero:



Esso è un *meta-albero*, nel senso che, al variare di A, B e C, si hanno tanti alberi diversi. È ovvio che, dato che l'albero si chiude, si chiuderanno anche tutti gli alberi ottenuti sostituendo A, B e C con fp particolari. Invece, se l'albero fosse rimasto aperto, non si poteva concludere nulla poiché il lavoro non sarebbe terminato, poiché vi sono nodi quali V[A], F[B], ...che richiedono ulteriori passi se al posto di A, B e C si mettono fp particolari. Quindi, i risultati ottenuti in precedenza nel caso in cui l'albero si chiude, possono essere generalizzati quando nei nodi figurano schemi di fp.

Generalizzando l'Esempio 3.1.1 si ha che:

$$\models A \wedge (B \to C) \to (B \to A \wedge C)$$

ossia, qualsiasi siano A, B e C, $A \wedge (B \to C) \to (B \to A \wedge C)$, è una tautologia.

Così, generalizzando gli Esempi 3.2.6 e 3.2.8 si ha:

$$A \to B, C \to D, A \vee C \models B \vee D$$
$$A \to B \vee C, B \to \neg A, D \to \neg C \models A \to \neg D$$

$\oplus$

3.3 Correttezza e completezza del metodo dell'albero semantico

In questo paragrafo vogliamo giustificare in modo rigoroso il funzionamento del procedimento di costruzione dell'albero semantico e le conclusioni che se ne traggono. Tale giustificazione si basa sulla seguente proprietà che è immediata conseguenza della definizione di valutazione booleana:

Proprietà 3.3.1

(*a*) *Data una regola del I tipo, se una valutazione è modello del nodo in alto, allora è modello delle sue conseguenze dirette, e, inversamente, se una valutazione è modello delle conseguenze del nodo, allora è modello del nodo in alto.*

(b) Data una regola del II tipo, se una valutazione è modello del nodo in alto, allora è modello di almeno una delle due conseguenze, e, inversamente, se una valutazione è modello di almeno una delle due conseguenze, allora è modello del nodo in alto.

Così, ad esempio, se una valutazione è modello di V[$\neg A$] (rende vera $\neg A$), allora è modello di F[A] (rende falsa A), e viceversa.
Se una valutazione è modello di V[$A \wedge B$] (rende vera $A \wedge B$), allora è modello sia di V[A], sia di V[B] (rende vere sia A sia B), e viceversa.
Se una valutazione è modello di V[$A \vee B$] (rende vera $A \vee B$), allora è modello di almeno una tra V[A] e V[B] (rende vera almeno una tra A e B), e viceversa.
Se una valutazione è modello di F[$A \wedge B$] (rende falsa $A \wedge B$), allora è modello di almeno una tra F[A] e F[B] (rende falsa almeno una tra e A e B), e viceversa.
Se una valutazione è modello di F[$A \to B$] (rende falsa $A \to B$), allora è modello sia di V[A], sia di F[B] (rende vera A e falsa B), e viceversa.
E così via per gli altri casi.

Definizione 3.3.1 (Modello di un ramo) *Si dice che una valutazione v è* modello di un ramo *di un albero semantico se e solo se è modello di tutti i nodi del ramo (in altri termini, se rende vere le fp che figurano nel ramo segnate con V e false quelle segnate con F).*

Definizione 3.3.2 (Ramo soddisfacibile) *Un* ramo è soddisfacibile *se e solo se esiste una valutazione v che è modello del ramo.*

Definizione 3.3.3 (Albero soddisfacibile) *Un* albero è soddisfacibile *se e solo se ha almeno un ramo soddisfacibile.*

Osservazione. Evidentemente *un ramo chiuso non è soddisfacibile* (in quanto nessuna valutazione può essere contemporaneamente modello di una fp segnata e della sua coniugata), e quindi *un albero chiuso non è soddisfacibile.*

Definizione 3.3.4 (Fp derivabile con il procedimento dell'albero semantico) *Si dice che la fp A è* derivabile con il procedimento dell'albero semantico*, e si scrive $\vdash A$, se e solo se esiste almeno un albero chiuso ottenuto sviluppando l'albero costituito dall'unico nodo* F[A] *mediante le regole di costruzione.*

Teorema 3.3.1 (Teorema di correttezza)

$$\boxed{\textit{Se} \vdash A, \textit{ allora} \models A}$$

Dim. Si deve dimostrare che, se esiste un albero chiuso ottenuto partendo con la radice F[A], allora A è una tautologia. Consegue facilmente dalla Proprietà 3.3.1 che *se un albero Π è soddisfacibile, allora un qualsiasi albero Π' che è successore immediato di Π* (cioè ottenuto da Π applicando una sola delle regole) *è ancora soddisfacibile*. Infatti, Π ha un ramo soddisfacibile. Sia Δ tale ramo (che non può essere chiuso per l'Osservazione precedente) e v la valutazione che lo soddisfa. Se Π' è ottenuto applicando una regola a un nodo che non compare in Δ, allora evidentemente Δ rimane inalterato in Π', e quindi Π' è soddisfacibile poiché contiene il ramo Δ che è soddisfacibile. Se Π' è ottenuto da Π applicando una regola del I tipo a un nodo che compare in Δ, allora in Π' compare il ramo ottenuto prolungando Δ con le conseguenze del nodo esaminato. Ma, per la Proprietà 3.3.1, la valutazione v soddisfa anche tali conseguenze e, quindi, soddisfa il ramo prolungato, e nuovamente Π' contiene un ramo soddisfacibile. Se, infine, Π' è ottenuto da Π applicando una regola del II tipo ad un nodo di Δ, allora Δ viene prolungato con una biforcazione; in Π' vi sono ora due rami che prolungano Δ e, sempre per la Proprietà 3.3.1, v soddisfa almeno uno dei due rami, e quindi Π' contiene un ramo soddisfacibile. Questo discorso si può esprimere dicendo che *la soddisfacibilità si trasmette verso il basso* nel senso che, se una valutazione soddisfa un ramo, soddisfa anche almeno uno dei prolungamenti che subisce durante il procedimento di costruzione.

È allora immediato concludere, per assurdo, la dimostrazione del teorema di correttezza. Se A non fosse una tautologia, vi sarebbe almeno una valutazione v che soddisfa F$[A]$. Poiché la soddisfacibilità si trasmette verso il basso, un qualsiasi albero sviluppato partendo da F$[A]$ dovrebbe avere un ramo soddisfacibile. Ma, per ipotesi, vi è un albero chiuso sviluppato partendo da F$[A]$, e ciò è assurdo poiché un albero chiuso non ha alcun ramo soddisfacibile. C.V.D.

Vogliamo ora dimostrare l'inverso del teorema di correttezza, cioè che, se A è una tautologia, allora esiste almeno un albero chiuso ottenuto assumendo come radice F$[A]$. In effetti dimostreremo che, se A è una tautologia, ogni albero per F$[A]$, se adeguatamente sviluppato[4], deve chiudersi.

Definizione 3.3.5 (Ramo e Albero completato) *Un* ramo Δ *di un albero è detto* completato *se è chiuso oppure se ogni nodo che non contiene una lettera proposizionale è stato contrassegnato, cioè:*

1a)	*se* V$[\neg A] \in \Delta$	*allora* F$[A] \in \Delta$
2a)	*se* V$[A \wedge B] \in \Delta$	*allora* V$[A] \in \Delta$ *e* V$[B] \in \Delta$
3a)	*se* V$[A \vee B] \in \Delta$	*allora* V$[A] \in \Delta$ *o* V$[B] \in \Delta$
4a)	*se* V$[A \to B] \in \Delta$	*allora* F$[A] \in \Delta$ *o* V$[B] \in \Delta$
1b)	*se* F$[\neg A] \in \Delta$	*allora* V$[A] \in \Delta$
2b)	*se* F$[A \wedge B] \in \Delta$	*allora* F$[A] \in \Delta$ *o* F$[B] \in \Delta$
3b)	*se* F$[A \vee B] \in \Delta$	*allora* F$[A] \in \Delta$ *e* F$[B] \in \Delta$
4b)	*se* F$[A \to B] \in \Delta$	*allora* V$[A] \in \Delta$ *e* F$[B] \in \Delta$

Un albero *si dice* completato *se ogni ramo è completato*[5].

Proprietà 3.3.2 *Ogni ramo completato e non chiuso è soddisfacibile.*

Dim. Consideriamo un qualsiasi ramo Δ completato e non chiuso. Definiamo[6] una valutazione nel modo seguente. Poniamo:

$v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{V}$	se	V$[\boldsymbol{p}] \in \Delta$
$v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{F}$	se	F$[\boldsymbol{p}] \in \Delta$
$v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{V}$ o $v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{F}$ a scelta	se	né V$[\boldsymbol{p}]$, né F$[\boldsymbol{p}] \in \Delta$[7]

La definizione è ben posta poiché Δ non è chiuso e quindi non può contenere sia V$[\boldsymbol{p}]$ sia F$[\boldsymbol{p}]$. Si dimostra facilmente per induzione sulla complessità dei nodi che tale valutazione v soddisfa tutti i nodi del ramo. Infatti soddisfa, per come è stata definita, i nodi che contengono una lettera proposizionale (ossia i nodi di complessità 1). Preso un qualsiasi nodo N contenente una fp di complessità $n+1$, ossia contenente n connettivi logici, esso è di uno degli otto tipi nelle premesse delle 1a)–4b) precedenti. Per la definizione di ramo completato, il ramo contiene le conseguenze di N (e precisamente le conseguenze se al nodo si applica una regola del I tipo, almeno una delle conseguenze se al nodo si applica una regola del II tipo). Poiché tali conseguenze sono di complessità minore o uguale a n, per ipotesi induttiva sono soddisfatte da v; allora, per la Proprietà 3.3.1, v soddisfa N. Quindi v soddisfa ogni nodo di Δ e Δ è soddisfacibile. C.V.D.

Teorema 3.3.2 (Teorema di completezza[8])

$$\boxed{\textit{Se} \models A, \textit{ allora} \vdash A}$$

[4]È bene tener presente che nella definizione di albero semantico non è richiesto che si siano esaminati tutti i nodi. Ad un qualsiasi stadio del procedimento si è in presenza di un albero semantico. Negli esempi presentati nel paragrafo precedente si proseguiva fino alla chiusura dell'albero o fino ad aver esaurito l'esame dei nodi (dei rami aperti).

[5]Gli alberi presentati negli esempi del paragrafo precedente sono tutti completati.

[6]Come abbiamo già fatto negli esempi del paragrafo precedente.

[7]Più drasticamente si potrebbe porre $v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{V}$ se e solo se V$[\boldsymbol{p}]$ è in Δ, ossia dare valore $\mathbf{V}$ alle lettere proposizionali per le quali V$[\boldsymbol{p}]$ è nel ramo e valore $\mathbf{F}$ a tutte le altre.

Dim. Si vuole dimostrare che, se A è una tautologia, allora esiste almeno un albero chiuso per F$[A]$. Consideriamo un qualsiasi albero Π per F$[A]$ che sia completato[9]. Dimostriamo che necessariamente Π è chiuso, e quindi $\vdash A$. In caso contrario vi sarebbe in Π almeno un ramo aperto completato; ma, per la Proprietà 3.3.2, tale ramo sarebbe soddisfacibile, quindi dovrebbe esistere una valutazione che soddisfa tutti i suoi nodi, in particolare F$[A]$ (la radice fa parte di tutti i rami); ma ciò è impossibile poiché, per ipotesi, A è una tautologia (e ogni valutazione soddisfa V$[A]$). C.V.D.

Si sono così giustificate le conclusioni ottenute negli Esempi del paragrafo precedente. Si osservi anche che, in effetti, si è dimostrato che, se $\models A$, non solo esiste un albero chiuso per F$[A]$, ma ogni albero completato è chiuso. Resta così giustificata la nostra precedente affermazione secondo la quale, nella costruzione dell'albero, si può procedere seguendo sviluppi diversi, pur di contrassegnare via via tutti i nodi fino a terminare il lavoro.

Estendiamo ora le nostre considerazioni dalle tautologie alla relazione di conseguenza logica da un insieme X. Il caso in cui l'insieme X è infinito sarà trattato nel paragrafo seguente; consideriamo quindi il caso di X finito.

Definizione 3.3.6 *Si dice che la fp B è* derivabile dall'insieme $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ con il procedimento dell'albero semantico*, e si scrive $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \vdash B$, se e solo se esiste almeno un albero chiuso ottenuto sviluppando l'albero il cui tratto iniziale è:*

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[B] \\ | \\ \mathrm{V}[A_1] \\ | \\ \mathrm{V}[A_2] \\ | \\ \dots \\ | \\ \mathrm{V}[A_m] \end{array}$$

Teorema 3.3.3

$$\boxed{\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \vdash B \Longleftrightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \models B}$$

Dim. Dalla precedente Osservazione 2 del §3.2, si ottiene facilmente che[10]:

$$\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \vdash B \Longleftrightarrow \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \to B$$

Dai teoremi di correttezza e completezza si ha:

$$\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \to B \Longleftrightarrow \models A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \to B$$

Già sappiamo che vale:

$$\models A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \to B \Longleftrightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \models B$$

Concatenando queste tre equivalenze si ottiene:

$$\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \vdash B \Longleftrightarrow \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \models B$$

[8] Talvolta questo teorema è detto di *completezza debole* per distinguerlo dal teorema di *completezza forte* che dimostreremo nel paragrafo seguente.

[9] Si è già osservato in precedenza che lo sviluppo di un albero semantico per una fp termina sempre in un numero finito di passi.

[10] Questa equivalenza segue dal fatto che, se si chiude un albero che inizia come specificato nella Definizione 3.3.6, allora si chiude l'albero che parte con F$[A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \to B]$ e viceversa.

3.4 I teoremi di compattezza e di completezza forte

Il teorema di compattezza (semantica) esprime una importante proprietà del nesso di conseguenza logica.

Teorema 3.4.1 (Teorema di compattezza (semantica) (A)) *Se $X \models A$, allora esiste un sottinsieme finito F di X tale che $F \models A$.*

Dim. Il teorema afferma che, se una fp A è conseguenza logica di un insieme di fp X, allora A è già conseguenza logica di un sottoinsieme finito di X. Se X è finito allora il teorema è scontato, poiché si può prendere lo stesso X come sottoinsieme finito di X. Il teorema, pertanto, è significativo solo se X è infinito. Poniamo quindi:

$$X = \{A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots\}$$

e procediamo come segue.

Sviluppiamo un albero per F$[A]$. Se esso si chiude, allora A è una tautologia, ed è conseguenza logica di qualsiasi insieme (Teorema 2.4.13, §2.4, Cap. 2), quindi anche di un qualsiasi sottoinsieme finito di X. Se l'albero completato rimane aperto (e quindi A non è una tautologia), aggiungiamo V$[A_1]$ come nuova foglia a tutti i rami aperti e proseguiamo la costruzione dell'albero. Se questo secondo albero si chiude, si chiude anche l'albero al cui inizio si è posto F$[A]$ e V$[A_1]$[11]. Ciò significa che $\{A_1\} \models A$, e quindi che $\{A_1\}$ è il sottoinsieme finito F di X richiesto dal teorema. Se anche questo secondo albero rimane aperto, si procede aggiungendo V$[A_2]$ a tutti i rami aperti e proseguendo il procedimento. Se il nuovo albero si chiude, allora, analogamente a prima, segue che $\{A_1, A_2\} \models A$, e quindi che $\{A_1, A_2\}$ è il sottoinsieme finito F di X richiesto dal teorema. In caso contrario, si aggiunge V$[A_3]$ ai rami aperti e si prosegue. A priori si hanno due possibilità:

1. ad un certo stadio, diciamo dopo aver introdotto V$[A_m]$ e sviluppato, l'albero si chiude. In questo caso $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \models A$ e $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ è il sottoinsieme finito F richiesto dal teorema;

2. il procedimento non ha fine, ossia in nessuno stadio l'albero si chiude. Se dimostriamo che questo secondo caso è impossibile, il teorema di compattezza è dimostrato.

Se si realizza il secondo caso, allora l'albero si sviluppa all'infinito. Si ha allora che l'albero contiene un numero infinito di nodi e ne segue[12] che contiene un ramo infinito Δ. Per il modo come l'albero è stato costruito, si ha che Δ contiene tutti i nodi F$[A]$, V$[A_1]$, V$[A_2]$, $\ldots$, V$[A_m]$, $\ldots$, e, inoltre, è completato (ogni nodo è stato esaminato) e ovviamente non chiuso (essendo infinito). Per la Proprietà 3.3.2 dimostrata nel §3.3, Δ è soddisfacibile, cioè esiste una valutazione v che soddisfa tutti i suoi nodi. Tale valutazione, pertanto, rende vere $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ e falsa A. Ma ciò contraddice l'ipotesi $X \models A$. Quindi il secondo caso porta ad una contraddizione con l'ipotesi e quindi non si può realizzare. C.V.D.

Si osservi che l'inverso del teorema di compattezza è ovvia conseguenza della proprietà di monotonicità (Teorema 2.4.1,§2.4,Cap. 2): se A è conseguenza logica di un sottoinsieme finito di X, a maggior ragione è conseguenza logica di X.

Del teorema di compattezza si può dare una formulazione in termini di soddisfacibilità (anziché di conseguenza logica):

---

[11] È evidentemente lo stesso aver posto A_1 subito dopo la radice F$[A]$, o al termine dei rami aperti in quanto la chiusura dell'albero, come si è osservato in precedenza, non dipende dall'ordine in cui sono esaminati i nodi.

[12] Vale infatti il seguente **Lemma di König**: *Se un albero in cui ogni nodo ha al più un numero finito di successori ha infiniti nodi, allora ha almeno un ramo infinito.* Una dimostrazione in sintesi è la seguente: Dato un albero che soddisfa l'ipotesi, chiamiamo buono un nodo se ha infiniti discendenti (cioè se ha al di sotto infiniti nodi), e cattivo in caso contrario (cioè se ha un numero finito di discendenti). Se un nodo N ha tutti i successori cattivi, anche N è cattivo, poiché, per ipotesi, ogni nodo ha un numero finito di successori (i discendenti di N sono i successori e i discendenti dei successori, i quali costituiscono un insieme finito). Quindi, un nodo buono ha almeno un successore buono. La radice, indichiamola con a_0, per ipotesi, è un nodo buono (poiché l'albero è infinito e tutti i nodi sono discendenti della radice). Almeno un successore della radice, sia a_1, è un nodo buono. Almeno un successore di a_1, sia a_2, è un nodo buono, e così via: $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ è un ramo infinito.

Teorema 3.4.2 (Teorema di compattezza (B)) *Se ogni sottoinsieme finito di X è soddisfacibile, allora X è soddisfacibile.*

Il teorema di compattezza in questa seconda forma si può dimostrare con un procedimento simile a quello impiegato nella dimostrazione precedente[13]. Preferiamo, invece, dimostrare l'equivalenza fra le due formulazioni.

Dimostriamo prima che il Teorema di compattezza nella formulazione (A) implica il Teorema di compattezza nella formulazione (B) e poi il viceversa.

Teorema 3.4.3

$$\boxed{\textbf{(A)} \rightarrow \textbf{(B)}}$$

Dim. Si hanno due ipotesi: a) se una fp è conseguenza logica di un insieme di fp allora è conseguenza logica di un sottoinsieme finito di quell'insieme, e b) ogni sottoinsieme finito di X è soddisfacibile. Si deve dimostrare che X è soddisfacibile.

Procediamo per assurdo. Se X non fosse soddisfacibile, qualsiasi fp sarebbe sua conseguenza logica (Teorema 2.4.13, §2.4, Cap. 2). In particolare:

$$X \models p \wedge \neg p$$

Per la prima ipotesi a), $p \wedge \neg p$ sarebbe conseguenza logica di un sottoinsieme finito F di X: $F \models p \wedge \neg p$. Per la seconda ipotesi b), F è soddisfacibile, quindi esiste v tale che $v \models F$. Ma allora dovrebbe essere $v \models p \wedge \neg p$, ma ciò è impossibile poiché nessuna valutazione può rendere vera una contraddizione quale $p \wedge \neg p$. C.V.D.

Teorema 3.4.4

$$\boxed{\textbf{(B)} \rightarrow \textbf{(A)}}$$

Dim. Si hanno due ipotesi: a) se ogni sottoinsieme finito di un insieme è soddisfacibile, allora l'insieme è soddisfacibile, e b) $X \models A$. Si deve dimostrare che esiste un sottoinsieme finito di X che ha A come conseguenza logica.

Dall'ipotesi b) segue (Teorema 2.4.4, §2.4, Cap. 2) NonSod $X \cup \{\neg A\}$. Per l'ipotesi a) (sfruttata per contrapposizione: se un insieme non è soddisfacibile, allora almeno un suo sottoinsieme finito non è soddisfacibile), esiste un sottoinsieme finito F di $X \cup \{\neg A\}$ che non è soddisfacibile. Consideriamo due casi a seconda se $\neg A$ non appartiene o appartiene a F.

Se $\neg A \notin F$, allora $F \subset X$. Poiché NonSod F, per il Teorema 2.4.13, §2.4, Cap. 2, $F \models A$ e F è il sottoinsieme finito di X cercato.

Se $\neg A \in F$, allora $F = F' \cup \{\neg A\}$ con $F' \subset X$. Da NonSod $F' \cup \{\neg A\}$, segue (Teorema 2.4.4, §2.4, Cap. 2), $F' \models A$ e F' è il sottoinsieme finito di X cercato. C.V.D.

Definizione 3.4.1 *Dato un insieme X di fp e una fp A, si dice che A* è derivabile da X con il procedimento dell'albero semantico*, e si scrive $X \vdash A$, se e solo se esiste un sottoinsieme finito $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ di X tale che $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \vdash A$*[14].

[13] In sintesi, come nella dimostrazione precedente, supposto X infinito, altrimenti il teorema è ovvio, cioè $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots\}$, si costruisce e si sviluppa un albero inserendo via via nei rami che rimangono aperti $\mathrm{V}[A_1], \mathrm{V}[A_2], \ldots, \mathrm{V}[A_m], \ldots$. Tale albero non può chiudersi altrimenti vi sarebbe un sottoinsieme finito di X (quello costituito dalle fp che figurano nei nodi che sono stati introdotti prima della chiusura) insoddisfacibile, contro l'ipotesi. Pertanto l'albero va avanti all'infinito e, quindi, ha un ramo completato non chiuso che contiene tutti nodi $\mathrm{V}[A_1], \mathrm{V}[A_2], \ldots, \mathrm{V}[A_m], \ldots$. Tale ramo, per la Proprietà 3.3.2, è soddisfacibile e la valutazione che lo soddisfa rende vere tutte le fp di X e, quindi, X è soddisfacibile. Si osservi anche che l'implicazione inversa è ovvia: se X è soddisfacibile, lo è anche ogni suo sottoinsieme finito.

[14] La definizione di $X \vdash A$ è tale che A è derivabile da X se e solo se è derivabile da un sottoinsieme finito di X, e quindi si può dire che vale la proprietà di compattezza sintattica (ossia vale per la derivabilità quanto il teorema di compattezza semantica sancisce relativamente alla conseguenza logica).

Teorema 3.4.5 (Teorema di correttezza forte)

$$\boxed{\textit{Se } X \vdash A, \textit{ allora } X \models A}$$

Dim. Se $X \vdash A$, per la definizione precedente, esiste un sottoinsieme finito $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ di X tale che $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \vdash A$. Dal Teorema alla fine del §3.3, segue $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \models A$, e quindi $X \models A$ per la proprietà di monotonia. C.V.D.

Teorema 3.4.6 (Teorema di completezza forte)

$$\boxed{\textit{Se } X \models A, \textit{ allora } X \vdash A}$$

Dim. Se $X \models A$, allora, per il teorema di compattezza, esiste un sottoinsieme finito F dell'insieme X, $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, tale che $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \models A$. Per il teorema alla fine del §3.3, ne segue che $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \vdash A$, e, per la definizione precedente, $X \vdash A$. C.V.D.

Per dimostrare il teorema di completezza forte, con il quale termina la nostra esposizione delle proprietà della procedura dell'albero semantico, si è fatto uso del teorema di compattezza e del teorema di completezza (sfruttato nella dimostrazione del teorema alla fine del §3.3). Vale anche il viceversa. Non solo dal Teorema di completezza forte segue il Teorema di completezza (che ne costituisce un caso particolare, quando X è vuoto), ma anche:

Teorema 3.4.7 *Dal Teorema di completezza forte segue il Teorema di compattezza*[15].

Dim. Sia $X \models A$. Dal Teorema di completezza forte segue $X \vdash A$, cioè, per definizione, esiste un sottoinsieme finito $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ di X tale che $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \vdash A$. Dal teorema alla fine del §3.3 (nella cui dimostrazione si sfrutta il teorema di completezza che, come si é osservato, segue dal Teorema di completezza forte), si ricava $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \models A$ e quindi che A è conseguenza logica di un sottoinsieme finito di X. C.V.D.

[15] Questo teorema è utile poiché in molte trattazioni della logica proposizionale si dimostra, con una tecnica che vedremo nel prossimo capitolo, direttamente il Teorema di completezza forte. Il Teorema di completezza e il Teorema di compattezza si ottengono allora come corollari del Teorema di completezza forte.

Capitolo 4

Il Calcolo della Deduzione Naturale

4.1 Introduzione

Nel capitolo precedente abbiamo illustrato il metodo dell'albero semantico, il quale consente di verificare se una data fp è una tautologia o se è conseguenza logica di altre. In questo capitolo intendiamo affrontare un diverso problema, vale a dire quello di generare le tautologie e di ricavare le conseguenze logiche da un insieme di premesse. Ad esempio, nel §3.1 del Capitolo 3 si è stabilito con considerazioni di natura semantica (ossia attraverso le valutazioni) che la fp $p \wedge (q \to r) \to (q \to p \wedge r)$ è una tautologia, e che la fp $q \vee s$ è conseguenza logica dell'insieme $X = \{p \to q, r \to s, p \vee r\}$. Il metodo dell'albero semantico consente di rendere "meccaniche" tali considerazioni facendole diventare un vero e proprio calcolo, condotto mediante regole completamente esplicitate e che può essere implementato su di un calcolatore. Esso, tuttavia, ha essenzialmente la natura di un test di verifica, ossia assume come data la fp della quale ci si chiede se è una tautologia o se è conseguenza logica di un insieme dato X. Come si è detto, invece, vorremmo disporre di un calcolo che ci consenta di trovare le tautologie e di ricavare $q \vee s$ dall'insieme $X = \{p \to q, r \to s, p \vee r\}$.

Nel corso del ventesimo secolo sono stati elaborati svariati calcoli logici che si possono dividere in tre classi:

(a) calcoli assiomatici (o "alla Hilbert");
(b) calcoli della deduzione naturale;
(c) calcoli dei sequenti (o "alla Gentzen").

Nonostante la loro enorme varietà, si tratta di formalismi tra loro equivalenti dal punto di vista delle proprietà metateoriche fondamentali (correttezza e completezza) e che si differenziano perché alcuni sono più adatti di altri a scopi particolari. In prima approssimazione si può dire che i calcoli assiomatici sono maggiormente rivolti al problema della generazione delle tautologie, quelli della deduzione naturale al problema di rinvenire le conseguenze logiche di un insieme di fp, quelli dei sequenti presentano vantaggi per il rinvenimento e l'analisi delle derivazioni.

4.2 Un calcolo assiomatico

Nei calcoli assiomatici si assumono come assiomi alcuni schemi di forme proposizionali, ossia tutte le (infinite) fp che hanno una certa struttura sintattica, e si introducono delle regole per derivarne altre a partire da quelle già ricavate. Gli assiomi sono tutti schemi di tautologie e le regole (che spesso si riducono ad una sola, il modus ponens MP) conservano la proprietà di essere una tautologia. Lo spirito che solitamente guida la scelta degli assiomi è quello tipico del metodo assiomatico, vale a dire quello di ottenere quanto auspicato a partire da un numero minimo di assunzioni. Come per quasi tutti i sistemi assiomatici, sono possibili svariate assiomatizzazioni alternative, tutte tra loro equivalenti. Una distinzione deriva da quali connettivi si sono assunti come primitivi nel linguaggio $\mathcal{L}$. Si è già avuto modo di accennare come in $\mathcal{L}$ si possano assumere come connettivi primitivi quelli di una qualunque base o di una estensione di una base: i rimanenti connettivi si possono "definire" a partire da quelli assunti come primitivi.

In uno dei calcoli più diffusi nella letteratura si assumono nel linguaggio solo i connettivi $\neg$ e $\rightarrow$, come assiomi i seguenti schemi di tautologie:

$$\begin{array}{ll} (A1) & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ (A2) & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\ (A3) & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \end{array}$$

e come unica regola il *Modus Ponens* (MP): se si sono ottenute le fp A e $A \rightarrow B$ (*premesse*) indipendentemente dal loro ordine, si può derivare B (*conclusione*). Schematicamente:

$$\frac{\begin{array}{l} A \\ A \rightarrow B \end{array}}{B}$$

Definizione 4.2.1 (Derivazione) *Una* derivazione *è una sequenza finita di fp $A_1, \ldots, A_m$, ciascuna delle quali è o un assioma o è ottenuta da due fp che la precedono mediante un'applicazione della regola MP.*

Definizione 4.2.2 (Fp derivabile) *Una* fp A *si dice* derivabile *(e si scrive $\vdash A$) se e solo se esiste una derivazione di cui A è la fp finale.*

Esempio 4.2.1 Verifichiamo che $\vdash p \rightarrow p$.

$$\begin{array}{ll} (1) & (p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)) \\ (2) & p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p) \\ (3) & (p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p) \\ (4) & p \rightarrow (p \rightarrow p) \\ (5) & p \rightarrow p \end{array}$$

Spiegazione. La (1) è un esempio dello schema (A2) (con $A = p$, $B = (p \rightarrow p)$, $C = p$). La (2) è un esempio dello schema (A1) (con $A = p$, $B = (p \rightarrow p)$). La (3) è ottenuta da (1) e (2) per MP. La (4) è un esempio dello schema (A1) (con $A = B = p$). Infine, la (5) è ottenuta da (3) e (4) per MP.

Se ovunque, nella derivazione precedente, al posto di p scriviamo A, abbiamo una metaderivazione (ossia uno schema di derivazioni) di $A \rightarrow A$ cioè per ogni fp A:

$$\vdash A \rightarrow A$$

$\oplus$

Definizione 4.2.3 (Derivazione da un insieme di fp X) *Dato un insieme X di fp, si dice* derivazione della fp A dall'insieme X *una sequenza finita di fp $A_1, \ldots, A_m$, tale che $A_m = A$ e ogni A_i è o un assioma, o è un elemento di X, o è ottenuta da due fp che la precedono mediante una applicazione della regola MP.*

Se esiste una derivazione di A da X si dice che A è *derivabile* da X e si scrive $X \vdash A$. Se X è finito, cioè $X = \{A_1, \ldots, A_m\}$, anziché $X \vdash A$, cioè $\{A_1, \ldots, A_m\} \vdash A$, scriviamo $A_1, \ldots, A_m \vdash A$. In questo contesto X è detto talvolta *insieme delle ipotesi* e si parla anche di *derivazione sotto ipotesi.*

Esempio 4.2.2 Verifichiamo che $A \to B, B \to C \vdash A \to C$:

(1)	$(B \to C) \to (A \to (B \to C))$	(A1)
(2)	$B \to C$	(elemento di X)
(3)	$A \to (B \to C)$	(da (1) e (2) per MP)
(4)	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(A2)
(5)	$(A \to B) \to (A \to C)$	(da (3) e (4) per MP)
(6)	$A \to B$	(elemento di X)
(7)	$A \to C$	(da (5) e (6) per MP)

Si tratta di una *metaderivazione*: comunque si sostituiscano A, B e C con fp si ha una derivazione.

La derivazione dell'esempio 4.2.2 può essere ora sfruttata come nuova regola a due premesse (detta di *concatenazione* e abbreviata con Conc):

$$\begin{array}{c} A \to B \\ B \to C \\ \hline A \to C \end{array}$$

Esempio 4.2.3 Verifichiamo che $\vdash \neg A \to (A \to B)$:

(1)	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	(A1[1])
(2)	$(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	(A3)
(3)	$\neg A \to (A \to B)$	(da (1) e (3) per Conc)

Esempio 4.2.4 Verifichiamo che $\vdash \neg\neg A \to A$:

(1)	$\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$	(per la 4.2.3[2])
(2)	$(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	(A3[3])
(3)	$\neg\neg A \to (\neg\neg A \to A)$	(da (1) e (2) per Conc)
(4)	$(\neg\neg A \to (\neg\neg A \to A)) \to ((\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A))$	(A2)
(5)	$(\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$	(da (3) e (4) per MP)
(6)	$\neg\neg A \to \neg\neg A$	(Esempio 4.2.1)
(7)	$\neg\neg A \to A$	(da (5) e (6) per MP)

Esempio 4.2.5 Verifichiamo che $\vdash A \to \neg\neg A$

(1)	$\neg\neg\neg A \to \neg A$	(dalla 4.2.4[4])
(2)	$(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A)$	(A3[5])
(3)	$A \to \neg\neg A$	(da (1) e (2) per MP)

Esempio 4.2.6 Verifichiamo che $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$:

(1)	$A \to B$	(elemento di X)
(2)	$\neg\neg A \to A$	(dalla 4.2.4)
(3)	$\neg\neg A \to B$	(da (1) e (2) per Conc)
(4)	$B \to \neg\neg B$	(dalla 4.2.5)
(5)	$\neg\neg A \to \neg\neg B$	(da (3) e (4) per Conc)
(6)	$(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$	(A3)
(7)	$\neg B \to \neg A$	(da (5) e (6) per MP)

Anche la 4.2.6 può essere usata come nuova regola (detta di *contrapposizione* e abbreviata con Contr):

[1] Con $\neg A$ al posto di A e $\neg B$ al posto di B.
[3] Con $\neg A$ al posto di A e $\neg\neg\neg A$ al posto di B.
[3] Con $\neg\neg A$ al posto di B.
[5] Con $\neg A$ al posto di A.
[5] Con $\neg\neg A$ al posto di B. Nel seguito lasceremo al lettore il compito di individuare quali sostituzioni si sono operate negli assiomi.

$$\frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$$

così come dall'assioma 3 si ottiene facilmente la regola (detta anch'essa di *contrapposizione*):

$$\frac{\neg A \to \neg B}{B \to A}$$

Così, usando le derivazioni 4.2.4 e 4.2.5, si ottengono facilmente:

$$\frac{A \to \neg B}{B \to \neg A} \qquad\qquad \frac{\neg A \to B}{\neg B \to A}$$

L'esempio richiamato all'inizio del paragrafo ("traducendo" $\vee$) diviene:

Esempio 4.2.7 Verificare che: $p \to q, r \to s, \neg p \to r \vdash \neg q \to s$:

(1)	$p \to q$	(elemento di X)
(2)	$\neg q \to \neg p$	(da (1) per Contr)
(3)	$\neg p \to r$	(elemento di X)
(4)	$\neg q \to r$	(da (2) e (3) per Conc)
(5)	$r \to s$	(elemento di X)
(6)	$\neg q \to s$	(da (4) e (5) per Conc)

$\oplus$

Per sviluppare meglio le derivazioni e ottenere altri risultati si può dimostrare il seguente importante:

Teorema 4.2.1 (Teorema di deduzione)

$$\boxed{X \cup \{A\} \vdash B \Longleftrightarrow X \vdash A \to B}$$

Ad esempio, dal Teorema di deduzione e dalla 4.2.2., si ha successivamente:

$A \to B \vdash (B \to C) \to (A \to C)$

$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

e così sono equivalenti:

$\vdash \neg\neg A \to A$ e $\neg\neg A \vdash A$

$\vdash A \to \neg\neg A$ e $A \vdash \neg\neg A$

Supponiamo che si voglia dimostrare:

$$\vdash \neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A)$$

(che "traduce" $\vdash A \wedge B \to B \wedge A$).
Per ottenere questo risultato basta aver dimostrato:

$$\vdash (B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$$

e applicare la regola di contrapposizione.
Ad esso si perviene applicando il Teorema di deduzione a:

$$B \to \neg A \vdash A \to \neg B$$

Verifichiamo allora quest'ultima relazione di derivabilità:

(1)	$B \to \neg A$	(elemento di X)
(2)	$\neg\neg A \to \neg B$	(da (1) per Contr)
(3)	$A \to \neg\neg A$	(per la 4.2.5.)
(4)	$A \to \neg B$	(per Conc a (2) e (3))

Supponiamo di voler derivare la tautologia:

$$p \wedge (q \to r) \to (q \to (p \wedge r))$$

ossia di verificare, "traducendo" $\wedge$, che:

$$\vdash \neg(p \to \neg(q \to r)) \to (q \to \neg(p \to \neg r))$$

A questo risultato si può arrivare applicando due volte il Teorema di deduzione a:

$$\neg(p \to \neg(q \to r)), q \vdash \neg(p \to \neg r)$$

che, a sua volta, si ottiene con la regola di contrapposizione da:

$$p \to \neg r, q \vdash p \to \neg(q \to r)$$

Sempre per il Teorema di deduzione è sufficiente dimostrare che:

$$p \to \neg r, q, p \vdash \neg(q \to r)$$

che, a sua volta, si ottiene facilmente per contrapposizione da:

$$p \to \neg r, p, q \to r \vdash \neg q$$

Verifichiamo allora quest'ultima relazione di derivabilità:

(1)	$p \to \neg r$	(elemento di X)
(2)	p	(elemento di X)
(3)	$\neg r$	(da (1) e (2) per MP)
(4)	$q \to r$	(elemento di X)
(5)	$\neg r \to \neg q$	(da (4) per Contr)
(6)	$\neg q$	(da (3) e (5) per MP)

Come emerge con chiarezza da quest'ultimo esempio, le derivazioni nei calcoli assiomatici sono in genere laboriose e, per poterle sviluppare, vanno sottoposte a trasformazioni preliminari del tipo di quelle ora esemplificate. Nel prossimo paragrafo introdurremo un calcolo più "naturale", nel senso che consente di operare direttamente sulle sequenze di fp.

In ogni caso, si possono dimostrare relativamente al calcolo assiomatico presentato, i *teoremi di correttezza* (debole e forte):

Se $\vdash A$, allora $\models A$
Se $X \vdash A$, allora $X \models A$

e i *teoremi di completezza* (debole e forte):

Se $\models A$, allora $\vdash A$
Se $X \models A$, allora $X \vdash A$

che sanciscono la perfetta adeguatezza del calcolo agli scopi prefissati[6]: non solo ogni fp derivabile è una tautologia (e una fp derivabile da un insieme X di fp ne è conseguenza logica), ma ogni tautologia, per quanto complessa, è derivabile mediante la sola regola MP dagli assiomi assunti e ogni fp che è conseguenza logica di X è anche derivabile da X.

[6] Questi teoremi sanciscono la completa equivalenza tra la derivabilità nel calcolo assiomatico e la derivabilità mediante il metodo dell'albero semantico studiata nel capitolo precedente.

4.3 Un calcolo della deduzione naturale

Nel calcolo della deduzione naturale non vi è la distinzione fra assiomi e regole: il calcolo è costituito solo da regole le quali consentono di trasformare sequenze finite di fp (o di meta-fp).

Definizione 4.3.1 (Sequenza) *Una* sequenza *è una lista finita e non vuota di fp. L'ultima fp di una sequenza è detta il* conseguente *della sequenza. Le altre fp formano l'insieme degli* antecedenti *della sequenza. L'insieme degli antecedenti può essere vuoto e in esso non contano né l'ordine delle fp, né le eventuali ripetizioni.*

Per indicare le sequenze useremo scritture del tipo:

$$A_1, \ldots, A_m \qquad A$$

in cui A è il conseguente e $A_1, \ldots, A_m$ sono gli antecedenti.
Esempi di sequenze sono:

$\neg q \to r, r \vee q, \neg\neg p \qquad p \wedge q$
$p \to (r \to q \vee s), \neg r \vee (s \to q) \qquad p \vee q$
$p \qquad q$
$p \vee r$

Sono essenzialmente la stessa sequenza:

$p \vee q, p \wedge q \qquad \neg p \to q$
$p \wedge q, p \vee q \qquad \neg p \to q$
$p \wedge q, p \vee q, p \vee q \qquad \neg p \to q$
$p \vee q, p \vee q, p \wedge q, p \vee q, p \wedge q \qquad \neg p \to q$

4.3.1 Le regole del calcolo della deduzione naturale

Le *regole* consentono di scrivere delle sequenze e di ottenerne delle nuove partendo da sequenze già ottenute. Più precisamente una *regola a zero premesse* consente di scrivere direttamente una sequenza di un certo tipo, una *regola ad una premessa*, data una sequenza di un certo tipo, consente di scriverne un'altra ad essa collegata, una *regola a due premesse*, date due sequenze consente di scriverne una terza, e così via. Per enunciare le regole ci serviremo della forma schematica già impiegata in precedenza: le sequenze che fanno da premesse vengono separate mediante una riga orizzontale dalla sequenza che è la conclusione della regola stessa. Le regole sono otto.

1. Regola di assunzione [**As**] (a zero premesse): Per ogni fp A si può scrivere la sequenza:

$$A \qquad A$$

2. Regola di introduzione della congiunzione nel conseguente [**I**$\wedge$] (a due premesse):

$$\frac{\begin{array}{c} A_1, \ldots, A_m \qquad A \\ B_1, \ldots, B_h \qquad B \end{array}}{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h \qquad A \wedge B}$$

(se si sono già scritte due sequenze qualsiasi, si può scrivere la sequenza che ha come insieme degli antecedenti l'unione degli insiemi degli antecedenti delle due sequenze, e come conseguente la congiunzione dei conseguenti).

3. Regola di eliminazione della congiunzione nel conseguente [**E**$\wedge$] (a una premessa):

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \qquad A \wedge B}{A_1, \ldots, A_m \qquad A} \qquad\qquad \frac{A_1, \ldots, A_m \qquad A \wedge B}{A_1, \ldots, A_m \qquad B}$$

(se si è già scritta una sequenza il cui conseguente è una congiunzione, si può scrivere la sequenza con stessi antecedenti e con conseguente uno dei due congiunti).

4. Regola di introduzione della disgiunzione nel conseguente [I∨] (a una premessa):

$$\frac{A_1,\ldots,A_m \qquad A}{A_1,\ldots,A_m \qquad A\vee B} \qquad\qquad \frac{A_1,\ldots,A_m \qquad A}{A_1,\ldots,A_m \qquad B\vee A}$$

(se si è già scritta una sequenza qualsiasi, si può scrivere la sequenza con stessi antecedenti e con conseguente una disgiunzione di cui un disgiunto è il conseguente della sequenza data).

5. Regola di eliminazione della disgiunzione dal conseguente [E∨] (a tre premesse):

$$\frac{\begin{array}{ll} A_1,\ldots,A_m & A\vee B \\ B_1,\ldots,B_h,A & C \\ C_1,\ldots,C_k,B & C \end{array}}{A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_h,C_1,\ldots,C_k \qquad C}$$

(se si sono già scritte tre sequenze di cui una ha come conseguente una disgiunzione $A\vee B$, altre due hanno stesso conseguente C e tra gli antecedenti una ha A e l'altra B, allora si può scrivere la sequenza di conseguente C e avente come antecedenti tutti quelli delle tre sequenze già scritte, con l'esclusione di A e B).

6. Regola di introduzione del condizionale nel conseguente [I→] (a una premessa):

$$\frac{A_1,\ldots,A_m,A \qquad B}{A_1,\ldots,A_m \qquad A\to B}$$

(se si è scritta una sequenza qualsiasi, si può scrivere la sequenza il cui conseguente è un condizionale il cui antecedente è uno degli antecedenti e il conseguente è il conseguente della sequenza già scritta).

7. Regola di eliminazione del condizionale nel conseguente [E→] (a due premesse):

$$\frac{\begin{array}{ll} A_1,\ldots,A_m & A\to B \\ B_1,\ldots,B_h & A \end{array}}{A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_h \qquad B}$$

(è la regola corrispettiva del *Modus Ponens*).

8. Regola della negazione classica [¬k] (a due premesse):

$$\frac{\begin{array}{ll} A_1,\ldots,A_m,\neg A & B \\ B_1,\ldots,B_h,\neg A & \neg B \end{array}}{A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_h \qquad A}$$

(se si sono scritte due sequenze aventi conseguenti uno la negazione dell'altro e aventi entrambe $\neg A$ tra gli antecedenti, allora si può scrivere la sequenza avente come antecedenti quelli delle sequenze già scritte con l'esclusione di $\neg A$ e aventi come conseguente A. Essa formalizza il ragionamento "per assurdo": se assumendo $\neg A$ come ipotesi si ottiene una contraddizione, allora si è dimostrata A).

Nota bene: Quando si applica una regola a due o tre premesse non conta l'ordine con cui figurano le premesse.

Definizione 4.3.2 (Derivazione) *Si dice* derivazione *una lista finita di sequenze ottenuta applicando le otto regole precedenti.*

La prima sequenza di una derivazione è sempre scritta in base alla regola di assunzione [As]; la seconda è scritta o nuovamente in base ad [As] oppure applicando una regola ad una premessa all'unica sequenza già scritta; la terza sequenza è scritta in base ad [As], oppure applicando una regola ad una premessa ad una delle prime due sequenze, oppure applicando una regola a due premesse alle due sequenze già scritte, e così via; ciascuna sequenza è scritta in base ad una delle regole, applicandola a sequenze già scritte che ne costituiscono le premesse.

Definizione 4.3.3 (Sequenza derivabile) *Una* sequenza $A_1, \ldots, A_m \quad A$ *si dice* derivabile*, e si scrive:*

$$\vdash A_1, \ldots, A_m \quad A$$

se essa è l'ultima sequenza di una derivazione. In tal caso si dice anche che A deriva dalle ipotesi $A_1, \ldots, A_m$.

Vediamo due semplici esempi di derivazioni. È opportuno numerare le sequenze della derivazione e scrivere accanto a ciascuna di esse la relativa giustificazione, ossia in base a quale regola è stata scritta (e quali sequenze precedenti sono adoperate come premesse).

(1)	p	p	[As]
(2)	$p \to q$	$p \to q$	[As]
(3)	$p, p \to q$	q	[E→] (1),(2)
(4)	p	$(p \to q) \to q$	[I→] (3)
(5)		$p \to ((p \to q) \to q)$	[I→] (4)

Quindi: $\vdash \quad p \to ((p \to q) \to q)$.

(1)	$p \wedge q$	$p \wedge q$	[As]
(2)	$p \wedge q$	p	[E∧] (1)
(3)	$p \wedge q$	q	[E∧] (1)
(4)	$p \wedge q$	$q \wedge p$	[I∧] (2),(3)

Quindi: $\vdash p \wedge q \quad q \wedge p$.

4.3.2 Regole eliminabili e derivazioni

Per poter sviluppare più agevolmente le derivazioni è opportuno introdurre un certo numero di altre regole, dette *eliminabili* in quanto la loro applicazione si può giustificare in base alle otto regole date. Applicare una regola eliminabile in una derivazione significa scrivere una sequenza alla quale si sarebbe pervenuti con le otto regole date mediante il procedimento che costituisce la giustificazione dell'eliminabilità della regola stessa. Quindi, l'applicazione delle regole eliminabili consente di derivare una sequenza con un numero di passaggi inferiore rispetto a quello che è richiesto se si ricorre soltanto alle otto regole iniziali, e ciò facilita notevolmente la ricerca delle derivazioni per ottenere una data sequenza.

1. Regola di rafforzamento della premessa [Rp] (a una premessa):

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \quad A}{A_1, \ldots, A_m, B \quad A}$$

(all'insieme degli antecedenti di una sequenza già ottenuta si può sempre aggiungere una qualsiasi fp B)[7].

[7] La regola [Rp] consente di ampliare a piacere l'insieme degli antecedenti delle sequenze e, quindi, di poter applicare le regole [E∨], [I→] e [¬k] anche quando negli antecedenti delle sequenze che fanno da premessa non compare la fp esplicitata.

Giustificazione:

(1)	$A_1, \ldots, A_m$	A	[premessa]
(2)	B	B	[As]
(3)	$A_1, \ldots, A_m, B$	$A \wedge B$	[I∧] (1),(2)
(4)	$A_1, \ldots, A_m, B$	A	[E∧] (3)

2. Regola di concatenazione [Cn] (a due premesse):

$$\frac{\begin{array}{l} A_1, \ldots, A_m \quad A \\ B_1, \ldots, B_h, A \quad B \end{array}}{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h \quad B}$$

(se A deriva da certe fp $A_1, \ldots, A_m$, e da A e altre fp $B_1, \ldots, B_h$ deriva B, allora B deriva dall'insieme di fp $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h$).

Giustificazione:

(1)	$A_1, \ldots, A_m$	A	[premessa]
(2)	$B_1, \ldots, B_h, A$	B	[premessa]
(3)	$B_1, \ldots, B_h$	$A \to B$	[I→] (2)
(4)	$A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h$	B	[E→] (1),(3)

3. Regola intuizionista[8] di negazione [¬i] (a due premesse):

$$\frac{\begin{array}{l} A_1, \ldots, A_m \quad A \\ B_1, \ldots, B_h \quad \neg A \end{array}}{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h \quad B}$$

(se da certe fp deriva A e da altre deriva $\neg A$, da tutte le fp deriva una fp B qualsiasi; è la forma con cui si enuncia nel calcolo della deduzione naturale la legge di Scoto "*ex absurdo sequitur quodlibet*").

Giustificazione:

(1)	$A_1, \ldots, A_m$	A	[premessa]
(2)	$B_1, \ldots, B_h$	$\neg A$	[premessa]
(3)	$A_1, \ldots, A_m, \neg B$	A	[Rp] (1)
(4)	$B_1, \ldots, B_h, \neg B$	$\neg A$	[Rp] (2)
(5)	$A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h$	B	[¬k] (3),(4)

4. Regola classica di doppia negazione [Dn] (a una premessa):

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \quad \neg\neg A}{A_1, \ldots, A_m \quad A}$$

Giustificazione:

(1)	$A_1, \ldots, A_m$	$\neg\neg A$	[premessa]
(2)	$A_1, \ldots, A_m, \neg A$	$\neg\neg A$	[Rp] (1)
(3)	$\neg A$	$\neg A$	[As]
(4)	$A_1, \ldots, A_m$	A	[¬k] (2),(3)

5. Regola minimale[9] di negazione [¬m] (a due premesse):

[8] La denominazione di questa regola deriva dal fatto che, se si sostituisce la regola [¬k] con la regola [¬i], si ottiene la logica intuizionista.

$$\frac{\begin{array}{ll} A_1, \ldots, A_m, A & B \\ B_1, \ldots, B_h, A & \neg B \end{array}}{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h \quad \neg A}$$

Giustificazione:

(1)	$A_1, \ldots, A_m, A \quad B$	[premessa]
(2)	$B_1, \ldots, B_h, A \quad \neg B$	[premessa]
(3)	$\neg\neg A \quad \neg\neg A$	[As]
(4)	$\neg\neg A \quad A$	[Dn] (3)
(5)	$A_1, \ldots, A_m, \neg\neg A \quad B$	[Cn] (1),(4)
(6)	$B_1, \ldots, B_h, \neg\neg A \quad \neg B$	[Cn] (2),(4)
(7)	$A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h \quad \neg A$	[¬k] (5),(6)

6. Regola intuizionista di doppia negazione [DnI] (a una premessa):

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \quad A}{A_1, \ldots, A_m \quad \neg\neg A}$$

Giustificazione:

(1)	$A_1, \ldots, A_m \quad A$	[premessa]
(2)	$A_1, \ldots, A_m, \neg A \quad A$	[Rp] (1)
(3)	$\neg A \quad \neg A$	[As]
(4)	$A_1, \ldots, A_m \quad \neg\neg A$	[¬m] (2),(3)

7. Regola di autofondazione [Af] (a una premessa):

$$\frac{A_1, \ldots, A_m, \neg A \quad A}{A_1, \ldots, A_m \quad A}$$

Giustificazione:

(1)	$A_1, \ldots, A_m, \neg A \quad A$	[premessa]
(2)	$\neg A \quad \neg A$	[As]
(3)	$A_1, \ldots, A_m \quad A$	[¬k] (1),(2)

In modo analogo si giustifica facilmente la:

8. Regola di autocontraddizione [Ac] (a una premessa):

$$\frac{A_1, \ldots, A_m, A \quad \neg A}{A_1, \ldots, A_m \quad \neg A}$$

9. Regole di contrapposizione [Cp] (a una premessa):

$$\text{(a)} \quad \frac{A_1, \ldots, A_m, A \quad B}{A_1, \ldots, A_m, \neg B \quad \neg A} \qquad \text{(b)} \quad \frac{A_1, \ldots, A_m, A \quad \neg B}{A_1, \ldots, A_m, B \quad \neg A}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{A_1, \ldots, A_m, \neg A \quad B}{A_1, \ldots, A_m, \neg B \quad A} \qquad \text{(d)} \quad \frac{A_1, \ldots, A_m, \neg A \quad \neg B}{A_1, \ldots, A_m, B \quad A}$$

[9] Se si sostituisce [¬k] con [¬m], si ottiene la logica minimale. Si può dimostrare che con [¬k] si può giustificare [¬i] e con [¬i] si può giustificare [¬m], ma non viceversa, per cui la logica intuizionista è più debole (nel senso che in essa sono derivabili meno sequenze) della logica proposizionale classica, e la logica minimale è più debole della logica intuizionista.

Giustificazione di (a):

(1) $A_1, \dots, A_m, A \qquad B$ [premessa]
(2) $\neg B \qquad \neg B$ [As]
(3) $A, \neg B \qquad \neg B$ [Rp] (2)
(4) $A_1, \dots, A_m, \neg B \qquad \neg A$ [¬m] (1),(3)

Giustificazione di (c):

(1) $A_1, \dots, A_m, \neg A \qquad B$ [premessa]
(2) $\neg B \qquad \neg B$ [As]
(3) $\neg A, \neg B \qquad \neg B$ [Rp] (2)
(4) $A_1, \dots, A_m, \neg B \qquad A$ [¬k] (1),(3)

10. Regola di esaustione [Es] (a due premesse):

$$\frac{\begin{array}{c} A_1, \dots, A_m, A \qquad B \\ B_1, \dots, B_h, \neg A \qquad B \end{array}}{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_h \qquad B}$$

Giustificazione:

(1) $A_1, \dots, A_m, A \qquad B$ [premessa]
(2) $B_1, \dots, B_h, \neg A \qquad B$ [premessa]
(3) $A_1, \dots, A_m, \neg B \qquad \neg A$ [Cp](1)
(4) $B_1, \dots, B_h, \neg B \qquad \neg\neg A$ [Cp](2)
(5) $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_h \qquad B$ [¬k] (3),(4)

11. Regola di eliminazione della congiunzione nell'antecedente [∧E] (a una premessa):

$$\frac{A_1, \dots, A_m, A \wedge B \qquad C}{A_1, \dots, A_m, A, B \qquad C}$$

Giustificazione:

(1) $A_1, \dots, A_m, A \wedge B \qquad C$ [premessa]
(2) $A \qquad A$ [As]
(3) $B \qquad B$ [As]
(4) $A, B \qquad A \wedge B$ [I∧] (2),(3)
(5) $A_1, \dots, A_m, A, B \qquad C$ [Cn] (1),(4)

12. Regola di introduzione della congiunzione nell'antecedente [∧I] (a una premessa):

$$\frac{A_1, \dots, A_m, A, B \qquad C}{A_1, \dots, A_m, A \wedge B \qquad C}$$

Giustificazione:

(1) $A_1, \dots, A_m, A, B \qquad C$ [premessa]
(2) $A \wedge B \qquad A \wedge B$ [As]
(3) $A \wedge B \qquad A$ [E∧] (2)
(4) $A \wedge B \qquad B$ [E∧] (2)
(5) $A_1, \dots, A_m, A \wedge B, B \qquad C$ [Cn] (1),(3)
(6) $A_1, \dots, A_m, A \wedge B \qquad C$ [Cn] (4),(5)

Osservazione. Mediante le regole [∧E] e [∧I], utilizzando anche le regole [E→] e [I→], si dimostra facilmente[10] la seguente equivalenza:

[10]Infatti:

$$\vdash A_1, A_2, \ldots, A_m \qquad A \Longleftrightarrow \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \to A$$

ossia *la derivabilità di una sequenza è equivalente alla derivabilità dell'unica fp condizionale che ha come antecedente la congiunzione degli antecedenti della sequenza e come conseguente il conseguente della sequenza.* Questo risultato è importante poiché illustra la sostanziale equivalenza tra i calcoli assiomatici e quelli della deduzione naturale. Derivare una sequenza equivale a derivare un'unica fp (come nei calcoli assiomatici).

13. Regola di introduzione del condizionale nell'antecedente [$\to$**I**] (a due premesse):

$$\frac{\begin{array}{c} A_1, \ldots, A_m, \neg A \qquad C \\ B_1, \ldots, B_h, B \qquad C \end{array}}{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h, A \to B \qquad C}$$

Giustificazione:

(1)	$A_1, \ldots, A_m, \neg A$	C	[premessa]
(2)	$B_1, \ldots, B_h, B$	C	[premessa]
(3)	A	A	[As]
(4)	$A \to B$	$A \to B$	[As]
(5)	$A, A \to B$	B	[E$\to$] (3),(4)
(6)	$B_1, \ldots, B_h, A, A \to B$	C	[Cn] (2),(5)
(7)	$A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h, A \to B$	C	[Es] (1),(6)

Esempi di derivazioni

Esempio 4.3.1 $\boxed{\vdash \qquad p \vee \neg p}$

(1)	p	p	[As]
(2)	p	$p \vee \neg p$	[I$\vee$](1)
(3)	$\neg p$	$\neg p$	[As]
(4)	$\neg p$	$p \vee \neg p$	[I$\vee$](3)
(5)		$p \vee \neg p$	[Es] (2),(4)

Esempio 4.3.2 $\boxed{\vdash \qquad \neg(p \wedge \neg p)}$

(1)	$p \wedge \neg p$	$p \wedge \neg p$	[As]
(2)	$p \wedge \neg p$	p	[E$\wedge$] (1)
(3)	$p \wedge \neg p$	$\neg p$	[E$\wedge$] (1)
(4)		$\neg(p \wedge \neg p)$	[$\neg$m] (2),(3)

Esempio 4.3.3 $\boxed{\vdash p \to q \qquad \neg p \vee q}$

(1)	$\neg p$	$\neg p$	[As]
(2)	$\neg p$	$\neg p \vee q$	[I$\vee$] (1)
(3)	q	q	[As]
(4)	q	$\neg p \vee q$	[I$\vee$] (3)
(5)	$p \to q$	$\neg p \vee q$	[$\to$I] (2),(4)

$\Rightarrow$) Da $\vdash A_1, A_2, \ldots, A_m \qquad A$, applicando ripetutamente [$\wedge$I], si ottiene $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \qquad A$ da cui la tesi per [I$\to$].
$\Leftarrow$) Da $\vdash \quad A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \qquad A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$ [As], applicando ripetutamente [$\wedge$E] si ha: $\vdash A_1, A_2, \ldots, A_m \qquad A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$;
dall'ipotesi: $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \to A$, per [E$\to$], segue la tesi.

Esempio 4.3.4 $\boxed{\vdash \neg p \vee q \qquad p \to q}$

(1)	p	p	[As]
(2)	q	q	[As]
(3)	q, p	q	[Rp] (2)
(4)	q	$p \to q$	[I$\to$] (3)
(5)	$\neg p$	$\neg p$	[As]
(6)	$p, \neg p$	q	[$\neg$i] (1),(5)
(7)	$\neg p$	$p \to q$	[I$\to$] (6)
(8)	$\neg p \vee q$	$\neg p \vee q$	[As]
(9)	$\neg p \vee$	$p \to q$	[E$\vee$] (4),(7),(8)

Esempio 4.3.5 $\boxed{\vdash p \wedge q \qquad \neg(\neg p \vee \neg q)}$

(1)	$p \wedge q$	$p \wedge q$	[As]
(2)	$p \wedge q$	p	[E$\wedge$] (1)
(3)	$p \wedge q$	q	[E$\wedge$] (1)
(4)	$\neg p \neg$	$(p \wedge q)$	[Cp](2)
(5)	$\neg q \neg$	$(p \wedge q)$	[Cp](3)
(6)	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	[As]
(7)	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q)$	[E$\vee$] (4),(5),(6)
(8)	$p \wedge q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	[Cp](7)

Esempio 4.3.6 $\boxed{\vdash \neg(\neg p \vee \neg q) \qquad p \wedge q}$

(1)	$\neg p$	$\neg p$	[As]
(2)	$\neg p$	$\neg p \vee \neg q$	[I$\vee$] (1)
(3)	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	p	[Cp] (2)
(4)	$\neg q$	$\neg q$	[As]
(5)	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	[I$\vee$] (4)
(6)	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	q	[Cp] (5)
(7)	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$p \wedge q$	[I$\wedge$] (3),(6)

Esempio 4.3.7 $\boxed{\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \wedge (q \vee r)}$

(1)	$p \wedge q$	$p \wedge q$	[As]
(2)	$p \wedge q$	p	[E$\wedge$] (1)
(3)	$p \wedge q$	q	[E$\wedge$] (1)
(4)	$p \wedge q$	$q \vee r$	[I$\vee$] (3)
(5)	$p \wedge q$	$p \wedge (q \vee r)$	[I$\wedge$] (2),(4)
(6)	$p \wedge r$	$p \wedge r$	[As]
(7)	$p \wedge r$	p	[E$\wedge$] (6)
(8)	$p \wedge r$	r	[E$\wedge$] (6)
(9)	$p \wedge r$	$q \vee r$	[I$\vee$] (8)
(10)	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	[I$\wedge$] (7),(9)
(11)	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	[As]
(12)	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r)$	[E$\vee$] (5),(10),(11)

Esempio 4.3.8 $\boxed{\vdash p \vee q, \neg q \qquad p}$

(1)	p	p	[As]
(2)	q	q	[As]
(3)	$\neg q$	$\neg q$	[As]
(4)	$q, \neg q$	p	[$\neg$i] (2),(3)
(5)	$p \vee q$	$p \vee q$	[As]
(6)	$p \vee q, \neg q$	p	[E$\vee$] (1),(4),(5)

Esempio 4.3.9 $\boxed{\vdash p \vee r, p \rightarrow q, r \rightarrow s \quad\quad q \vee s}$

(1)	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	[As]
(2)	p	p	[As]
(3)	$p, p \rightarrow q$	q	[E→] (1),(2)
(4)	$p, p \rightarrow q$	$q \vee s$	[I∨] (3)
(5)	$r \rightarrow s$	$r \rightarrow s$	[As]
(6)	r	r	[As]
(7)	$r, r \rightarrow s$	s	[E→] (5),(6)
(8)	$r, r \rightarrow s$	$q \vee s$	[I∨] (7)
(9)	$p \vee r$	$p \vee r$	[As]
(10)	$p \vee r, p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$q \vee s$	[E∨] (4),(8),(9)

Esempio 4.3.10 $\boxed{\vdash \quad\quad A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))}$

(1)	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	[As]
(2)	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow B$	[As]
(3)	A	A	[As]
(4)	$A \rightarrow (B \rightarrow C), A$	$B \rightarrow C$	[E→] (1),(3)
(5)	$A \rightarrow B, A$	B	[E→] (2),(3)
(6)	$A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A$	C	[E→] (4),(5)
(7)	$A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B$	$A \rightarrow C$	[I→] (6)
(8)	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	[I→] (7)
(9)		$A \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	[I→] (8)

4.3.3 Concetti metateorici e loro proprietà

Per il calcolo della deduzione naturale dimostriamo ora i teoremi di correttezza e di completezza forte. Prima però definiamo rigorosamente i concetti coinvolti e stabiliamone alcuni legami.

Definizione 4.3.4 (A è derivabile da X ($X \vdash A$)) *Dato un insieme X di fp e una fp A, si dice che A è* derivabile da X, *e si scrive $X \vdash A$ (nel calcolo della deduzione naturale) se e solo se esiste un sottoinsieme finito $\{A_1, \ldots, A_m\}$ di X tale che $\vdash A_1, \ldots, A_m \quad\quad A$, ossia se è derivabile una sequenza il cui conseguente è A e i cui antecedenti sono elementi di X.*

In particolare la fp A è derivabile (senza ipotesi), e si scrive $\vdash A$, se è derivabile la sequenza costituita da A (senza antecedenti e con A come conseguente). Se X è finito, ossia $X = \{A_1, \ldots, A_m\}$, anziché $\{A_1, \ldots, A_m\} \vdash A$, scriviamo $A_1, \ldots, A_m \vdash A$.

Le otto regole del calcolo danno luogo ad altrettante proprietà del concetto di derivabilità da un insieme X:

Proprietà 1 Se $A \in X$, allora $X \vdash A$.

Proprietà 2 Se $X \vdash A$ e $Y \vdash B$, allora $X \cup Y \vdash A \wedge B$.

Proprietà 3 Se $X \vdash A \wedge B$, allora $X \vdash A$ e $X \vdash B$.

Proprietà 4 Se $X \vdash A$, allora, per ogni B, $X \vdash A \vee B$ e $X \vdash B \vee A$.

Proprietà 5 Se $X \vdash A \vee B$ e $Y \cup \{A\} \vdash C$ e $Z \cup \{B\} \vdash C$, allora $X \cup Y \cup Z \vdash C$.

Proprietà 6 Se $X \cup \{A\} \vdash B$, allora $X \vdash A \rightarrow B$[11].

Proprietà 7 Se $X \vdash A$ e $Y \vdash A \rightarrow B$, allora $X \cup Y \vdash B$.

[11] Questa proprietà corrisponde al teorema di deduzione per i calcoli assiomatici che abbiamo enunciato nel §4.2. I calcoli della deduzione naturale hanno la proprietà che il teorema di deduzione è ovvia conseguenza dell'aver adottato la regola di [I→].

Proprietà 8 Se $X \cup \{\neg A\} \vdash B$ e $Y \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$, allora $X \cup Y \vdash A$.

Altre proprietà corrispondono alle regole eliminabili. Ad esempio, da $[\neg \mathrm{i}]$ segue:

Proprietà 9 Se $X \vdash A$ e $Y \vdash \neg A$, allora, per ogni B, $X \cup Y \vdash B$.

Così, dalle regole di autofondazione e di autocontraddizione seguono le proprietà:

Proprietà 10 Se $X \cup \{\neg A\} \vdash A$, allora $X \vdash A$.

Proprietà 11 Se $X \cup \{A\} \vdash \neg A$, allora $X \vdash \neg A$.

e così via per le altre regole eliminabili.

Definizione 4.3.5 (Ctr X) *Si dice che un insieme di fp X è* contraddittorio*, in simboli* Ctr X*, se e solo se esiste una fp A tale che $X \vdash A \wedge \neg A$.*

Dalle Proprietà 2 e 3 segue che Ctr X se e solo se esiste una fp A per cui $X \vdash A$ e $X \vdash \neg A$ e, dalla Proprietà 9, si ottiene che, se Ctr X, allora, per ogni B, $X \vdash B$ (*da un insieme contraddittorio è derivabile una qualsiasi fp*[12]).

Definizione 4.3.6 (Nctr X) *Un insieme X non contraddittorio (o coerente, o consistente), in simboli* Nctr X*, è un insieme dal quale non è derivabile alcuna contraddizione* $(A \wedge \neg A)$.

Segue dalla considerazione precedente che Nctr X *se e solo se esiste almeno una fp B che non è derivabile da X.*

Proprietà 12 Ctr $X \cup \{\neg A\} \iff X \vdash A$.

Dim. $\Rightarrow$) Se Ctr $X \cup \{\neg A\}$, allora, per qualsiasi fp B, $X \cup \{\neg A\} \vdash B$.
In particolare: $X \cup \{\neg A\} \vdash A$.
Per autofondazione (Proprietà 10) segue $X \vdash A$.
$\Leftarrow$) Se $X \vdash A$, a maggior ragione $X \cup \{\neg A\} \vdash A$ e, per la Proprietà 1, $X \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$.
Per introduzione della congiunzione (nel conseguente) si ha: $X \cup \{\neg A\} \vdash A \wedge \neg A$.
Quindi Ctr $X \cup \{\neg A\}$. C.V.D.

Dalla Proprietà 12 segue per contrapposizione:

Proprietà 13 Nctr $X \cup \{\neg A\} \iff X \nvdash A$ (A non è derivabile da X).

I concetti sintattici di derivabilità e di non contraddittorietà si legano ai concetti semantici di conseguenza logica e soddisfacibilità definiti nel Cap. 2:

(A) **Teorema di correttezza** (forte): $\boxed{X \vdash A \Rightarrow X \models A}$

(B) **Teorema di completezza** (forte): $\boxed{X \models A \Rightarrow X \vdash A}$

(C) **Teorema di coerenza**: $\boxed{\text{Sod } X \Rightarrow \text{Nctr } X}$

(D) **Teorema di esistenza del modello**: $\boxed{\text{Nctr } X \Rightarrow \text{Sod } X}$

Dimostriamo l'equivalenza tra il teorema di correttezza e il teorema di coerenza e tra il teorema di completezza e il teorema di esistenza del modello.

[12] Un insieme X da cui è derivabile qualsiasi proposizione è detto *assolutamente contraddittorio* (o banale). Nella logica classica, come si è visto, *un insieme X è assolutamente contraddittorio se e solo se è contraddittorio.* La derivazione di una contraddizione da un insieme di ipotesi X rende X banale (inutile), nel senso che da X si deriva qualsiasi fp. Esistono dei sistemi logici in cui la contraddittorietà non implica l'assoluta contraddittorietà, in cui, quindi, la derivazione di una contraddizione da un insieme di ipotesi non lo banalizza. Tali logiche sono dette *logiche paracoerenti.*

$\boxed{\text{(A)} \Rightarrow \text{(C)}}$

Ipotesi: $X \vdash A \Rightarrow X \models A$ **Tesi:** Nctr X
Sod X

Dim. Per assurdo, supponiamo che sia Ctr X. Allora, per qualche A, $X \vdash A \wedge \neg A$. Dalla prima ipotesi segue $X \models A \wedge \neg A$. Dalla seconda ipotesi segue che esiste una valutazione v tale che $v \models X$. Ma se $A \wedge \neg A$ è conseguenza logica di X, dovrebbe essere $v \models A \wedge \neg A$, il che è assurdo. C.V.D.

$\boxed{\text{(C)} \Rightarrow \text{(A)}}$

Ipotesi: Sod $X \Rightarrow$ Nctr X **Tesi:** $X \models A$
$X \vdash A$

Dim. Da $X \vdash A$, per la Proprietà 12, segue Ctr $X \cup \{\neg A\}$. Dalla prima ipotesi (applicata per contrapposizione: Ctr $X \Rightarrow$ NonSod X), segue NonSod $X \cup \{\neg A\}$, e, pertanto, $X \models A$. C.V.D.

$\boxed{\text{(B)} \Rightarrow \text{(D)}}$

Ipotesi: $X \models A \Rightarrow X \vdash A$ **Tesi:** Sod X
Nctr X

Dim. Per assurdo, se NonSod X, segue $X \models A \wedge \neg A$. Dalla prima ipotesi segue $X \vdash A \wedge \neg A$, in contraddizione con la seconda ipotesi Nctr X. C.V.D.

$\boxed{\text{(D)} \Rightarrow \text{(B)}}$

Ipotesi: Nctr $X \Rightarrow$ Sod X **Tesi:** $X \vdash A$
$X \models A$

Dim. Dall'ipotesi $X \models A$ segue NonSod $X \cup \{\neg A\}$. Dalla prima ipotesi (applicata per contrapposizione: NonSod $X \Rightarrow$ Ctr X) segue Ctr $X \cup \{\neg A\}$, e quindi $X \vdash A$ per la Proprietà 12. C.V.D.

Nel prossimo paragrafo 4.3.4 dimostreremo il teorema di correttezza forte per il calcolo della deduzione naturale (col che sarà dimostrato anche il teorema di coerenza). Nel successivo paragrafo 4.3.5 dimostreremo il teorema di esistenza del modello (col che sarà dimostrato anche il teorema di completezza forte).

4.3.4 La correttezza del calcolo della deduzione naturale

Il teorema di correttezza ha il seguente enunciato:

$$\boxed{X \vdash A \Rightarrow X \models A}$$

Per definizione, $X \vdash A$ significa che esiste un sottoinsieme finito $\{A_1, \ldots, A_m\}$ di X tale che:

$$\vdash A_1, \ldots, A_m \qquad A$$

Se dimostriamo che:

$$\vdash A_1, \ldots, A_m \qquad A \Longrightarrow \{A_1, \ldots, A_m\} \models A$$

a maggior ragione (proprietà di monotonia) sarà $X \models A$.

Definizione 4.3.7 (Sequenza corretta) *Una* sequenza *si dice* corretta *se il conseguente è conseguenza logica dell'insieme degli antecedenti.*

Quindi, il teorema di correttezza sarà dimostrato una volta che si è dimostrato che:

$\boxed{\textit{Ogni sequenza derivabile è corretta}}$

Definizione 4.3.8 (Regola corretta) *Una* regola *si dice* corretta *se, qualora applicata a premesse corrette*[13]*, produce una sequenza corretta.*

Poiché tutte le sequenze di una qualsiasi derivazione sono scritte in base alle otto regole, se dimostriamo che le otto regole sono corrette, ne segue che ogni sequenza derivabile è corretta e, quindi, per quanto osservato in precedenza, che vale il Teorema di correttezza.

$\boxed{\textit{Le otto regole del calcolo della deduzione naturale sono corrette}}$

Dim.

[As] **Ipotesi:** **Tesi:** $A \models A$

Si tratta di dimostrare che, per ogni A, la sequenza $A \quad A$ è corretta, cioè che $A \models A$, ma ciò è ovvio.

[I$\wedge$] **Ipotesi:** $A_1, \dots, A_m \models A$, $B_1, \dots, B_h \models B$ **Tesi:** $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_h \models A \wedge B$

Si tratta di dimostrare che se le sequenze:

$$\begin{array}{ll} A_1, \dots, A_m & A \\ B_1, \dots, B_h & B \end{array}$$

sono corrette, allora la sequenza:

$$A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_h \qquad A \wedge B$$

è corretta, cioè se:

$$\begin{array}{l} A_1, \dots, A_m \models A \\ B_1, \dots, B_h \models B \end{array}$$

allora:

$$A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_h \models A \wedge B$$

Infatti, se $v \models \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_h\}$, allora, $v \models \{A_1, \dots, A_m\}$, da cui per la prima ipotesi, $v \models A$, e $v \models \{B_1, \dots, B_h\}$, da cui per la seconda ipotesi, $v \models B$. Da $v \models A$ e $v \models B$, segue $v \models A \wedge B$.

[E$\wedge$] **Ipotesi:** $A_1, \dots, A_m \models A \wedge B$ **Tesi:** $A_1, \dots, A_m \models A$ $(A_1, \dots, A_m \models B)$

Evidentemente, se $v \models \{A_1, \dots, A_m\}$, allora, per ipotesi, $v \models A \wedge B$, e da questa segue $v \models A$ (e $v \models B$).

[I$\vee$] **Ipotesi:** $A_1, \dots, A_m \models A$ **Tesi:** $A_1, \dots, A_m \models A \vee B$ $(A_1, \dots, A_m \models B \vee A)$

Evidentemente, se $v \models \{A_1, \dots, A_m\}$, allora, per ipotesi, $v \models A$, e da questa segue $v \models A \vee B$ (e $v \models B \vee A$).

[E$\vee$] **Ipotesi:** $A_1, \dots, A_m \models A \vee B$, $B_1, \dots, B_h, A \models C$, $C_1, \dots, C_k, B \models C$ **Tesi:** $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_h, C1, \dots, Ck \models C$

Sia v tale che $v \models \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_h, C_1, \dots, C_k\}$. Allora, in particolare, si ha: $v \models \{A_1, \dots, A_m\}$, $v \models \{B_1, \dots, B_h\}$ e $v \models \{C_1, \dots, C_k\}$. Dalla prima ipotesi segue $v \models A \vee B$, da

[13] Più precisamente: una regola a zero premesse è corretta se consente di scrivere una sequenza corretta; una regola ad una premessa è corretta se, quando applicata a una sequenza corretta produce una sequenza corretta; una regola a due premesse è corretta se, quando applicata a due sequenze corrette, produce una sequenza corretta; e così via.

cui $v \models A$ oppure $v \models B$. Se $v \models A$, da $v \models \{B_1, \ldots, B_h\}$ e dalla seconda ipotesi segue $v \models C$. Se $v \models B$, da $v \models \{C_1, \ldots, C_k\}$ e dalla terza ipotesi segue $v \models C$. In ogni caso $v \models C$.

[I→] **Ipotesi:** $A_1, \ldots, A_m, A \models B$ **Tesi:** $A_1, \ldots, A_m \models A \to B$

Sia v tale che $v \models \{A_1, \ldots, A_m\}$. Se $v \not\models A$, allora $v \models A \to B$. Se $v \models A$, allora $v \models \{A_1, \ldots, A_m, A\}$ e dall'ipotesi segue $v \models B$, per cui $v \models A \to B$. In ogni caso si ha $v \models A \to B$.

[E→] **Ipotesi:** $A_1, \ldots, A_m \models A$ **Tesi:** $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h \models B$
$B_1, \ldots, B_h \models A \to B$

Sia v tale che $v \models \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h\}$. In particolare si ha $v \models \{A_1, \ldots, A_m\}$ e $v \models \{B_1, \ldots, B_h\}$. Dalle due ipotesi seguono $v \models A$ e $v \models A \to B$. Da queste ultime due si ottiene $v \models B$.

[¬k] **Ipotesi:** $A_1, \ldots, A_m, \neg A \models B$ **Tesi:** $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h \models A$
$B_1, \ldots, B_h, \neg A \models \neg B$

Sia v tale che $v \models \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h\}$. Si deve dimostrare che $v \models A$. Per assurdo, se non valesse $v \models A$, allora si avrebbe $v \models \neg A$. Dalle due ipotesi seguirebbero rispettivamente $v \models B$ e $v \models \neg B$. Ma ciò è assurdo (v non può rendere vere sia B, sia $\neg B$). C.V.D.

4.3.5 La completezza del calcolo della deduzione naturale

Come si è osservato alla fine del paragrafo 4.3.3, per dimostrare il Teorema di completezza (forte), si può dimostrare il Teorema di esistenza del modello:

$$\boxed{\text{Nctr } X \Rightarrow \text{Sod } X}$$

Una tecnica introdotta da Henkin per dimostrare il Teorema di esistenza del modello, che si applica anche per molti altri calcoli logici, è la seguente: dato un qualsiasi insieme non contraddittorio X lo si estende il più possibile in modo che conservi la proprietà di essere non contraddittorio. Si determina una valutazione che rende vere tutte le fp di questo ampliamento. Tale valutazione rende vere anche le fp di X, e pertanto X è soddisfacibile.

Definizione 4.3.9 (Insieme non contraddittorio massimale) *Si dice che un* insieme di fp Y è non contraddittorio massimale *se e solo se Y è non contraddittorio e, se $A \notin Y$, allora* Ctr $Y \cup \{A\}$.

In altre parole, un insieme non contraddittorio massimale è un insieme non contraddittorio tale che, se gli si aggiunge una fp (che già non gli appartiene), diviene contraddittorio.

Lemma 4.3.1 (Lemma di Lindenbaum) *Ogni insieme non contraddittorio X ammette una estensione Y non contraddittoria massimale.*

Dim. Sia X un insieme non contraddittorio. Consideriamo una enumerazione di tutte le fp di $\mathcal{L}$:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m, \ldots\ldots$$

Definiamo per induzione una successione di insiemi di fp $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\ldots$ come segue:

Base $X_0 = X$

Passo

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n \cup \{A_{n+1}\} & \text{se Nctr } X_n \cup \{A_{n+1}\} \\ X_n & \text{se Ctr } X_n \cup \{A_{n+1}\} \end{cases}$$

Si parte dall'insieme non contraddittorio X ($= X_0$) dato. Si considera la fp A_1; se non fa divenire contraddittorio X la si aggiunge ad X (e $X_1 = X_0 \cup \{A_1\}$), altrimenti la si scarta (e $X_1 = X_0$). Poi si passa ad A_2; se non fa divenire contraddittorio X_1 la si aggiunge ad X_1 (e $X_2 = X_1 \cup \{A_2\}$), altrimenti la si scarta (e $X_2 = X_1$); e così si procede passando in rassegna tutte le fp, scartando quelle che conducono a contraddizione e inserendo le altre.

Evidentemente, per come è costruita la successione degli insiemi X_i, ciascun insieme X_i è non contraddittorio, e inoltre:

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$$

Poniamo $Y = \bigcup X_i$, ossia Y è l'unione di tutti gli insiemi X_i.

Dimostriamo che Y soddisfa i requisiti richiesti. Anzitutto evidentemente $X \subset Y$.

(a) *Y è non contraddittorio.* Se fosse Ctr Y, allora, per qualche A, $Y \vdash A \wedge \neg A$. Per definizione, ciò significa che esiste un sottoinsieme finito $\{B_1, \ldots, B_h\}$ di Y tale che:

$$B_1, \ldots, B_h \vdash A \wedge \neg A$$

D'altra parte, per come Y è stato costruito, ciascuna B_s è elemento di qualche X_i. Poiché le B_s sono in numero finito e gli X_i sono contenuti l'uno nell'altro (formano una catena), vi sarà un X_i che contiene tutti le B_s (se $B_1 \in X_u, \ldots, B_s \in X_v$, basta prendere come i il massimo tra $u, \ldots, v$). Ma se X_i contiene $\{B_1, \ldots, B_h\}$, allora si ha anche $X_i \vdash A \wedge \neg A$, contro il fatto che ciascun X_i è non contraddittorio.

(b) *Y è massimale.* Sia $B \notin Y$. Si deve dimostrare che Ctr $Y \cup \{B\}$. Dato che nell'enumerazione iniziale sono elencate tutte le fp, anche B figurerà in essa; sia $B = A_{k+1}$. Se A_{k+1} non appartiene ad Y, vuol dire che è stata scartata quando è venuto il suo turno nella costruzione induttiva (al passo k), e ciò significa che $X_k \cup \{A_{k+1}\}$ è contraddittorio. Ma allora, a maggior ragione, è contraddittorio $Y \cup \{A_{k+1}\}$, ossia $Y \cup \{B\}$, che è un soprainsieme di $X_k \cup \{A_{k+1}\}$ (essendo $X_k \subset Y$).

C.V.D.

Proprietà degli insiemi non contraddittori massimali

Nel seguito con Y indichiamo un insieme non contraddittorio massimale di fp.

Proprietà 1 (chiusura)

$$A \in Y \iff Y \vdash A$$

Dim. $\Rightarrow$) Se $A \in Y$, allora, evidentemente (Proprietà 1,§4.3.3), $Y \vdash A$.

$\Leftarrow$) Sia, per assurdo, $A \notin Y$. Essendo Y massimale, allora Ctr $Y \cup \{A\}$. Quindi da $Y \cup \{A\}$ deriva qualsiasi fp, in particolare:

$$Y \cup \{A\} \vdash \neg A$$

da cui, per autocontraddizione, si ha: $Y \vdash \neg A$. Ciò è assurdo poiché, per ipotesi, $Y \vdash A$ e Nctr Y. C.V.D.

Proprietà 2 (completezza rispetto a $\neg$):

$$\neg B \in Y \iff B \notin Y$$

Dim. $\Rightarrow$) Se $\neg B \in Y$, allora $Y \vdash \neg B$. Se fosse $B \in Y$, si avrebbe anche $Y \vdash B$ contro la non contraddittorietà di Y. Quindi $B \notin Y$.

$\Leftarrow$) Se $B \notin Y$, per la massimalità di Y, Ctr $Y \cup \{B\}$. Ma allora, come nella dimostrazione precedente, $Y \cup \{B\} \vdash \neg B$ e quindi $Y \vdash \neg B$ per la regola di autocontraddizione. Da $Y \vdash \neg B$ segue $\neg B \in Y$ per la Proprietà 1. C.V.D.

Proprietà 3 (completezza rispetto a $\wedge$):

$$B \wedge C \in Y \Longleftrightarrow B \in Y \text{ e } C \in Y$$

Dim. $\Rightarrow$) Se $B \wedge C \in Y$, allora $Y \vdash B \wedge C$, e quindi (per eliminazione di $\wedge$; Proprietà 3, §4.3.3), $Y \vdash B$ e $Y \vdash C$. Ne segue $B \in Y$ e $C \in Y$ per la Proprietà 1.

$\Leftarrow$) Se $B \in Y$ e $C \in Y$, allora $Y \vdash B$ e $Y \vdash C$, e quindi (per introduzione di $\wedge$; Proprietà 2, §4.3.3) $Y \vdash B \wedge C$ e, infine, $B \wedge C \in Y$ per la Proprietà 1. C.V.D.

Proprietà 4 (completezza rispetto a $\vee$):

$$B \vee C \in Y \Longleftrightarrow B \in Y \text{ oppure } C \in Y$$

Dim. $\Rightarrow$) Se $B \vee C \in Y$, allora $Y \vdash B \vee C$. Per ottenere la tesi (che è sotto forma di un'alternativa) dimostriamo che, se $B \notin Y$, allora $C \in Y$. Se $B \notin Y$, essendo Y massimale, è Ctr $Y \cup \{B\}$, per cui $Y \cup \{B\} \vdash C$. Poiché $C \vdash C$, dalle tre condizioni $Y \vdash B \vee C$, $Y \cup \{B\} \vdash C$, $C \vdash C$, segue $Y \vdash C$ (per eliminazione di $\vee$; Proprietà 5,§4.3.3), e infine $C \in Y$ per la Proprietà 1.

$\Leftarrow$) Se $B \in Y$, allora $Y \vdash B$, da cui $Y \vdash B \vee C$ (per introduzione di $\vee$; Proprietà 4,§4.3.3) e quindi $B \vee C \in Y$ per la Proprietà 1. Se $C \in Y$ la dimostrazione è analoga: da $Y \vdash C$ segue $Y \vdash B \vee C$ e quindi $B \vee C \in Y$. C.V.D.

Proprietà 5 (completezza rispetto a $\rightarrow$):

$$B \rightarrow C \in Y \Longleftrightarrow B \notin Y \text{ oppure } C \in Y$$

Dim. $\Rightarrow$) Sia $B \rightarrow C \in Y$, da cui $Y \vdash B \rightarrow C$. Per dimostrare la tesi (che è un'alternativa) basta dimostrare che, se $B \in Y$, allora $C \in Y$. Ma se $B \in Y$, si ha $Y \vdash B$ la quale, con $Y \vdash B \rightarrow C$, comporta (per eliminazione di $\rightarrow$; Proprietà 7,§4.3.3) $Y \vdash C$, da cui $C \in Y$ per la Proprietà 1.

$\Leftarrow$) Sia $B \notin Y$. Allora, per la massimalità di Y, Ctr $Y \cup \{B\}$, da cui $Y \cup \{B\} \vdash C$ e quindi (per introduzione di $\rightarrow$; Proprietà 6,§4.3.3) $Y \vdash B \rightarrow C$ e quindi $B \rightarrow C \in Y$ per la Proprietà 1.

Sia $C \in Y$. Allora $Y \vdash C$. A maggior ragione $Y \cup \{B\} \vdash C$ e, come in precedenza, $Y \vdash B \rightarrow C$ e quindi $B \rightarrow C \in Y$. C.V.D.

Teorema 4.3.1 *Ogni insieme non contraddittorio massimale è soddisfacibile.*

Dim. Sia Y un qualsiasi insieme non contraddittorio massimale. Per dimostrare che Y è soddisfacibile bisogna definire una valutazione che rende vere tutte le fp di Y. Per la proprietà di completezza rispetto a $\neg$ e per la non contraddittorietà di Y si ha che, per ogni lettera proposizionale $\boldsymbol{p}$, o $\boldsymbol{p} \in Y$ o $\neg \boldsymbol{p} \in Y$ (e non entrambe le cose)[14].

Possiamo allora definire la seguente valutazione:

$$v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{V} \Longleftrightarrow \boldsymbol{p} \in Y$$

(e quindi $v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{F} \Longleftrightarrow \boldsymbol{p} \notin Y \Longleftrightarrow \neg \boldsymbol{p} \in Y$).

Dimostriamo che tale valutazione v soddisfa Y dimostrando, per induzione sulla complessità di A, che, per ogni fp A:

$$v(A) = \mathbf{V} \Longleftrightarrow A \in Y$$

Base: $A = \boldsymbol{p}$

In tal caso la tesi è $v(\boldsymbol{p}) = \mathbf{V} \Longleftrightarrow \boldsymbol{p} \in Y$, che vale per la definizione stessa di v.

Passo:

[14] Questa è la ragione per cui, per dimostrare il teorema di esistenza del modello, si ricorre alle estensioni massimali. Intuitivamente, partendo da X lo si estende (con la tecnica illustrata nella dimostrazione del Lemma di Lindenbaum) ad un insieme massimale Y, il quale contiene affermate o negate tutte le lettere proposizionali. Imponendo che siano vere le lettere che sono in Y (e false quelle la cui negazione è in Y) si costruisce la valutazione che rende vere tutte e sole le fp di Y.

1. $A = \neg B$
   Si deve dimostrare: $v(\neg B) = \mathbf{V} \iff \neg B \in Y$ (assumendo l'ipotesi induttiva $v(B) = \mathbf{V} \iff B \in Y$).
   Si ha: $v(\neg B) = \mathbf{V} \iff v(B) = \mathbf{F} \iff$ (per ipotesi induttiva) $B \notin Y \iff$ (per la Proprietà 2 di completezza rispetto a $\neg$) $\neg B \in Y$.

2. $A = B \wedge C$
   Si deve dimostrare $v(B \wedge C) = \mathbf{V} \iff B \wedge C \in Y$ (assumendo le ipotesi induttive $v(B) = \mathbf{V} \iff B \in Y$ e $v(C) = \mathbf{V} \iff C \in Y$).
   Si ha: $v(B \wedge C) = \mathbf{V} \iff v(B) = \mathbf{V}$ e $v(C) = \mathbf{V} \iff$ (per le ipotesi induttive) $B \in Y$ e $C \in Y \iff$ (per la Proprietà 3 di completezza rispetto a $\wedge$) $B \wedge C \in Y$.

3. $A = B \vee C$
   Si deve dimostrare $v(B \vee C) = \mathbf{V} \iff B \vee C \in Y$ (assumendo le ipotesi induttive $v(B) = \mathbf{V} \iff B \in Y$ e $v(C) = \mathbf{V} \iff C \in Y$).
   Si ha:$v(B \vee C) = \mathbf{V} \iff v(B) = \mathbf{V}$ oppure $v(C) = \mathbf{V} \iff$ (per le ipotesi induttive) $B \in Y$ oppure $C \in Y \iff$ (per la Proprietà 4 di completezza rispetto a $\vee$) $B \vee C \in Y$.

4. $A = B \to C$
   Si deve dimostrare $v(B \to C) = \mathbf{V} \iff B \to C \in Y$ (assumendo le ipotesi induttive come nei due casi precedenti).
   Si ha: $v(B \to C) = \mathbf{V} \iff v(B) = \mathbf{F}$ oppure $v(C) = \mathbf{V} \iff$ (per le ipotesi induttive) $B \in Y$ oppure $C \in Y \iff$ (per la Proprietà 5 di completezza rispetto a $\to$) $B \to C \in Y$.

C.V.D.

Teorema 4.3.2 (Teorema di esistenza del modello)

$$\boxed{\text{Nctr } X \Rightarrow \text{Sod } X}$$

Dim. Se Nctr X, per il Lemma di Lindenbaum esiste una estensione non contraddittoria massimale Y di X. Per il teorema precedente Y è soddisfacibile. Ma la valutazione che rende vere tutte le fp di Y, a maggior ragione, rende vere tutte le fp di X (che è un sottoinsieme di Y), e quindi vale Sod X. C.V.D.

In definitiva, avendo dimostrato il Teorema di esistenza del modello, segue anche il Teorema di completezza forte ($X \models A \Rightarrow X \vdash A$) che è ad esso equivalente. Per quanto osservato alla fine del §3.4 del Cap. 3, si hanno anche come conseguenze il Teorema di completezza debole e il Teorema di compattezza (nelle sue due formulazioni equivalenti).

4.4 Un calcolo dei sequenti alla Gentzen

Nei calcoli alla Gentzen si trattano sequenze in cui vi è un insieme di antecedenti e un insieme di conseguenti, che chiamiamo sequenti per distinguerli dalle sequenze del calcolo della deduzione naturale. Se $\{A_1, \ldots, A_m\}$ è l'insieme degli antecedenti e $\{B_1, \ldots, B_n\}$ l'insieme dei conseguenti, il sequente si scrive:

$$A_1, \ldots, A_m \supset B_1, \ldots, B_n$$

(in cui il simbolo $\supset$ separa gli antecedenti dai conseguenti[15]).

Nel seguito di questo paragrafo useremo una notazione abbreviata ponendo $U = \{A_1, \ldots, A_m\}$ e $V = \{B_1, \ldots, B_n\}$, per cui il sequente precedente si scriverà più concisamente:

$$U \supset V$$

[15] Si ricordi sempre che negli insiemi non contano né l'ordine degli elementi, né le eventuali ripetizioni.

Si dice che una valutazione v rende *vero* un sequente se e solo se o rende falsa una fp di U o rende vera una fp di V (o, equivalentemente, se e solo se, quando rende vere tutte le fp di U, rende vera almeno una fp di V). In caso contrario v rende falso il sequente. Un sequente è *corretto* se e solo se è vero rispetto ad ogni valutazione.

In altre parole, se associamo al sequente la fp:

$$A = A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \to B_1 \vee \ldots \vee B_n$$

il valore di verità del sequente rispetto ad una valutazione v coincide con quello della fp A, e il sequente è corretto se e solo se A è una tautologia.

Se l'insieme degli antecedenti è vuoto, il sequente si scrive:

$$\supset V$$

e la fp associata è $B_1 \vee \ldots \vee B_n$.

Se l'insieme dei conseguenti è vuoto, il sequente si scrive:

$$U \supset$$

e la fp associata è $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)$.

Infine, sia U che V possono essere vuoti, e si ha il sequente vuoto:

$$\supset$$

che è sempre falso (ad esso si può associare come fp una contraddizione quale $A \wedge \neg A$).

4.4.1 Le regole del calcolo dei sequenti

Il calcolo dei sequenti si basa su uno schema di assiomi (una regola a zero premesse) e su otto regole di inferenza, due per ciascun connettivo (una per l'introduzione del connettivo negli antecedenti, l'altra per l'introduzione del connettivo nei conseguenti).

Assiomi [Ax]: $U, A \supset V, A$.

Sono assiomi tutte le sequenze in cui l'insieme degli antecedenti e l'insieme dei conseguenti hanno una fp in comune.

Regole

Introduzione della congiunzione nei conseguenti [$\wedge$**C**] (a due premesse):

$$\frac{U \supset V, A \qquad U \supset V, B}{U \supset V, A \wedge B}$$

Introduzione della congiunzione negli antecedenti [$\wedge$**A**] (a una premessa):

$$\frac{U, A, B \supset V}{U, A \wedge B \supset V}$$

Introduzione della disgiunzione nei conseguenti [$\vee$**C**] (a una premessa):

$$\frac{U \supset V, A, B}{U \supset V, A \vee B}$$

Introduzione della disgiunzione negli antecedenti [$\vee$**A**] (a due premesse):

$$\frac{U, A \supset V \qquad U, B \supset V}{U, A \vee B \supset V}$$

Introduzione del condizionale nei conseguenti $[\to\mathbf{C}]$ (a una premessa):

$$\frac{U, A \supset V, B}{U \supset V, A \to B}$$

Introduzione del condizionale negli antecedenti $[\to\mathbf{A}]$ (a due premesse):

$$\frac{U \supset V, A \qquad U, B \supset V}{U, A \to B \supset V}$$

Introduzione della negazione nei conseguenti $[\neg\mathbf{C}]$ (a una premessa):

$$\frac{U, A \supset V}{U \supset V, \neg A}$$

Introduzione della negazione negli antecedenti $[\neg\mathbf{A}]$ (a una premessa):

$$\frac{U \supset V, A}{U, \neg A \supset V}$$

Si dimostra facilmente che il calcolo è corretto, cioè che ogni sequente derivabile è corretto (gli assiomi sono sequenti corretti e se le premesse di una regola sono corrette è corretto il sequente conseguente all'applicazione della regola). Si può dimostrare anche il teorema di completezza forte.

Vediamo tre esempi di derivazioni nel calcolo dei sequenti:

Esempio 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, q \to r, q \supset p\ [\mathrm{Ax}]}{p \wedge (q \to r), q \supset p}\,[\wedge\mathrm{A}] \qquad \dfrac{\dfrac{p, q \supset r, q\ [\mathrm{Ax}] \qquad p, q, r \supset r\ [\mathrm{Ax}]}{p, q, q \to r \supset r}\,[\to\mathrm{A}]^{16}}{p \wedge (q \to r), q \supset r}\,[\wedge\mathrm{A}]}{p \wedge (q \to r), q \supset p \wedge r}\,[\wedge\mathrm{C}]}{p \wedge (q \to r) \supset q \to (p \wedge r)}\,[\to\mathrm{C}]}{\supset p \wedge (q \to r) \to (q \to (p \wedge r))}\,[\to\mathrm{C}]$$

Esempio 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \to s, p \supset q, s, p\ [\mathrm{Ax}]\ r \to s, p, q \supset q, s\ [\mathrm{Ax}]}{r \to s, p \to q, p \supset q, s}\,[\to\mathrm{A}] \quad \dfrac{p \to q, r \supset q, s, r\ [\mathrm{Ax}]\ p \to q, r, s \supset q, s\ [\mathrm{Ax}]}{r \to s, p \to q, r \supset q, s}\,[\to\mathrm{A}]}{r \to s, p \to q, p \vee r \supset q, s}\,[\vee\mathrm{A}]}{r \to s, p \to q, p \vee r \supset q \vee s}\,[\vee\mathrm{C}]$$

Esempio 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \supset p, q[\mathrm{Ax}] \quad p, q \supset q[\mathrm{Ax}]}{p \to q, p \supset q}\,[\to\mathrm{A}]}{p \to q, p, \neg q \supset}\,[\neg\mathrm{A}]}{p \to q, \neg q \supset \neg p}\,[\neg\mathrm{C}]}{p \to q \supset \neg q \to \neg p}\,[\to\mathrm{C}]$$

---

[16] Con $U = \{p, q\}$, $V = \{r\}$, $A = q$, $B = r$.

4.4.2 Il metodo dell'albero semantico a blocchi

Se si tiene presente la stretta relazione tra il sequente generico:

$$A_1, \ldots, A_m \supset B_1, \ldots, B_n$$

e la fp:

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_n$$

è naturale associare al sequente il seguente insieme di fp segnate:

$$X = \mathrm{V}[A_1], \ldots, \mathrm{V}[A_m], \mathrm{F}[B_1], \ldots, \mathrm{F}[B_n]$$

in quanto il sequente è corretto se e solo se la fp è una tautologia se e solo se l'insieme X non è soddisfacibile.

Da quanto abbiamo appreso nel Cap. 3, l'insoddisfacibilità di X è equivalente al chiudersi dell'albero semantico al cui inizio si pone un tratto di ramo con i nodi V[A_1],...,V[A_m],F[B_1],...,F[B_n]. Modifichiamo la costruzione dell'albero mettendo nei nodi, anziché singole fp segnate, dei blocchi di fp segnate che corrispondono ai rami dell'albero nella costruzione precedente. Quando in un blocco vi è una fp segnata cui si applica una regola del I tipo, il blocco successivo conterrà, al posto della fp in questione, le sue conseguenze dirette; quando in un blocco vi è una fp segnata cui si applica una regola del II tipo, il blocco viene seguito, con biforcazione, da due blocchi ciascuno dei quali contiene, al posto della fp in oggetto, una delle sue conseguenze. Volendo si possono contrassegnare le fp man mano che si applicano le regole. Un blocco si chiude quando contiene una fp segnata e la sua coniugata (e per segnalare che il blocco è chiuso poniamo *all'esterno). Se lo sviluppo conduce a blocchi che si chiudono tutti, allora il blocco alla radice è insoddisfacibile[17]. Vediamo tre esempi.

Esempio 1

$$\boxed{\mathrm{F}[(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q)]^*}$$

$$\boxed{\mathrm{V}[p \rightarrow q],\ \mathrm{F}[\neg(p \wedge \neg q)]^*}$$

$$\boxed{\mathrm{V}[p \rightarrow q],\ \mathrm{V}[p \wedge \neg q]^*}$$

$$\boxed{\mathrm{V}[p \rightarrow q],\ \mathrm{V}[p]\ \ \mathrm{V}[\neg q]^*}$$

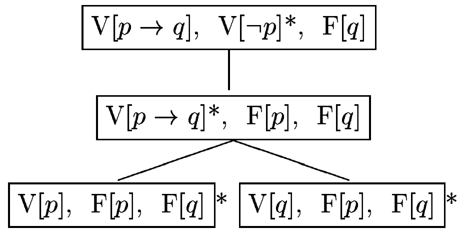
$$\boxed{\mathrm{V}[p \rightarrow q]^*,\ \mathrm{V}[p]\ \ \mathrm{F}[q]}$$

$$\boxed{\mathrm{F}[p],\ \mathrm{V}[p],\ \mathrm{F}[q]}\,* \qquad \boxed{\mathrm{V}[q],\ \mathrm{F}[p],\ \mathrm{F}[q]}\,*$$

In questo esempio, in cui nel blocco iniziale è presente una sola fp segnata con F, si perviene a due blocchi chiusi (in quello a sinistra vi è F[p] e V[p]; in quello a destra V[q] e F[q]). Ciò significa che la fp $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ è una tautologia.

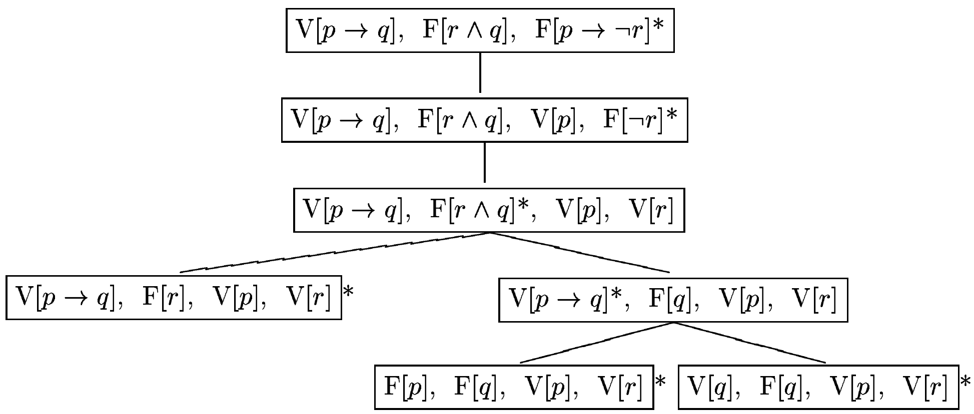
[17]Se il blocco iniziale è costituito solo da F[A], il chiudersi dello sviluppo equivale a $\models A$ (A è una tautologia). Se il blocco iniziale è V[A_1],...,V[A_m],F[B], il chiudersi dell'albero a blocchi significa che B è conseguenza logica di $\{A_1, \ldots, A_m\}$, ossia che $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow B$ è una tautologia. Se il blocco iniziale è V[A_1],...,V[A_m],F[B_1], ...,F[B_n], il chiudersi dell'albero a blocchi significa che la fp $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_n$ è una tautologia (e quindi che il sequente corrispondente è corretto).

Esempio 2



Anche in questo esempio si perviene a due blocchi chiusi, per cui l'insieme iniziale di fp segnate è insoddisfacibile; si è stabilito quindi che $p \vee q, \neg p \models q$.

Esempio 3



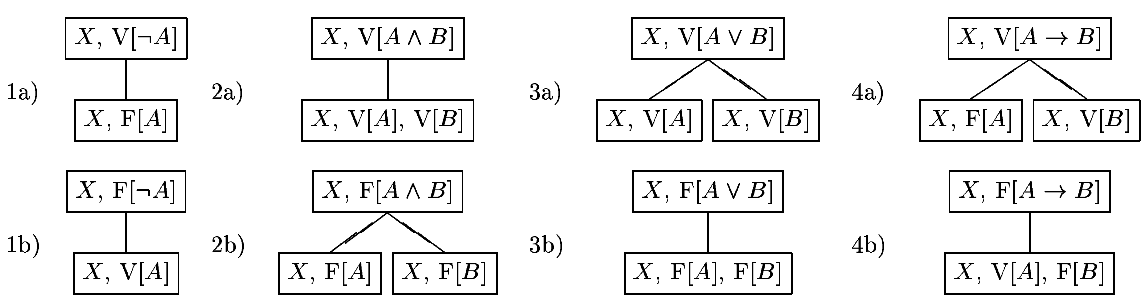
Anche in questo terzo esempio si perviene a blocchi che si chiudono. Pertanto, l'insieme nel blocco alla radice risulta insoddisfacibile. Si può allora concludere che la fp $(p \to q) \to ((r \wedge q) \vee (p \to \neg r))$ è una tautologia, e il sequente:

$$p \to q \supset r \wedge q, p \to \neg r$$

è corretto.

Regole per la costruzione dell'albero a blocchi

Se $X = \mathrm{V}[A_1], \dots, \mathrm{V}[A_m], \mathrm{F}[B_1], \dots, \mathrm{F}[B_n]$, allora:



La costruzione dell'albero a blocchi si esegue applicando le rispettive regole ai blocchi foglie nei rami già costruiti fino ad un certo stadio. Al procedimento dell'albero a blocchi si possono adattare tutti i ragionamenti svolti nel Capitolo 3, e quindi si possono dimostrare i Teoremi di correttezza e completezza (forte).

4.4.3 Relazione tra il calcolo dei sequenti e il metodo dell'albero a blocchi

Se $X = \{\mathrm{V}[A_1], \ldots, \mathrm{V}[A_m], \mathrm{F}[B_1], \ldots, \mathrm{F}[B_n]\}$ e indichiamo con $\mid X \mid$ il sequente:

$$A_1, \ldots, A_m \supset B_1, \ldots, B_n$$

si vede facilmente che lo schema di assiomi del calcolo dei sequenti si può scrivere:

$$\mid X, \mathrm{V}[A], \mathrm{F}[A] \mid$$

e che alle regole precedenti corrispondono ordinatamente le regole del calcolo dei sequenti che si ottengono scambiando premesse e conclusioni e mettendole tra sbarre. Così, ad esempio, alla 1a) corrisponde:

$$\frac{\mid X, \mathrm{F}[A] \mid}{\mid X, \mathrm{V}[\neg A] \mid}$$

che significa:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \supset B_1, \ldots, B_n, A}{A_1, \ldots, A_m, \neg A \supset B_1, \ldots, B_n}$$

ossia la regola di introduzione della negazione negli antecedenti [¬A].

Alla regola 2a) corrisponde:

$$\frac{\mid X, \mathrm{V}[A], \mathrm{V}[B] \mid}{\mid X, \mathrm{V}[A \wedge B] \mid}$$

che significa:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m, A, B \supset B_1, \ldots, B_n}{A_1, \ldots, A_m, A \wedge B \supset B_1, \ldots, B_n}$$

ossia la regola di introduzione della congiunzione negli antecedenti [∧A].

Alla regola 3a) corrisponde:

$$\frac{\mid X, \mathrm{V}[A] \mid \quad \mid X, \mathrm{V}[B] \mid}{\mid X, \mathrm{V}[A \vee B] \mid}$$

che significa:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m, A \supset B_1, \ldots, B_n \quad A_1, \ldots, A_m, B \supset B_1, \ldots, B_n}{A_1, \ldots, A_m, A \vee B \supset B_1, \ldots, B_n}$$

ossia la regola di introduzione della disgiunzione negli antecedenti [∨A].

Alla regola 4a) corrisponde:

$$\frac{\mid X, \mathrm{F}[A] \mid \quad \mid X, \mathrm{V}[B] \mid}{\mid X, \mathrm{V}[A \rightarrow B] \mid}$$

che significa:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m \supset B_1, \ldots, B_n, A \quad A_1, \ldots, A_m, B \supset B_1, \ldots, B_n}{A_1, \ldots, A_m, A \rightarrow B \supset B_1, \ldots, B_n}$$

ossia la regola di introduzione del condizionale negli antecedenti [→A].

In modo analogo si può constatare facilmente come alle regole 1b), 2b), 3b) e 4b) corrispondano le regole di introduzione dei connettivi nei conseguenti [¬C], [∧C], [∨C] e [→C].

Agli assiomi del calcolo dei sequenti sono associati dei blocchi chiusi.

Da questa corrispondenza si può dedurre quanto segue: se negli alberi a blocchi, al posto dei blocchi mettiamo le sequenze corrispondenti, quando l'albero è chiuso (in tutte le foglie vi sono blocchi chiusi), se si capovolge l'albero (ossia si procede dalle foglie verso la radice) si ottiene una derivazione nel calcolo dei sequenti. Vediamolo a proposito dei tre esempi precedenti.

Esempio 1*

Blocchi	*Sequenti corrispondenti*
F[p], V[p], F[q]	$p \supset p, q$
V[q], V[p], F[q]	$q, p \supset q$
V[$p \to q$], V[p], F[q]	$p \to q, p \supset q$
V[$p \to q$], V[p], V[$\neg q$]	$p \to q, p, \neg q \supset$
V[$p \to q$], V[$p \wedge \neg q$]	$p \to q, p \wedge \neg q \supset$
V[$p \to q$], F[$\neg(p \wedge \neg q)$]	$p \to q \supset \neg(p \wedge \neg q)$
F[$(p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$]	$\supset (p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$

All'albero a blocchi sviluppato nell'Esempio 1 corrisponde la seguente derivazione del calcolo dei sequenti:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \supset p, q[\mathrm{Ax}] \quad q, p \supset q[\mathrm{Ax}]}{p \to q, p \supset q}[\to\mathrm{A}]}{p \to q, p, \neg q \supset}[\neg\mathrm{A}]}{p \to q, p \wedge \neg q \supset}[\wedge\mathrm{A}]}{p \to q \supset \neg(p \wedge \neg q)}[\neg\mathrm{C}]}{\supset (p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)}[\to\mathrm{C}]$$

Esempio 2*

Questa volta scriviamo direttamente la derivazione nel calcolo dei sequenti che corrisponde all'albero a blocchi sviluppato nel precedente Esempio 2:

$$\dfrac{\dfrac{p \supset p, q\ [\mathrm{Ax}] \qquad q \supset p, q\ [\mathrm{Ax}]}{p \vee q \supset p, q}[\vee\mathrm{A}]}{p \vee q, \neg p \supset q}[\neg\mathrm{A}]$$

Esempio 3*

Anche in questo caso scriviamo subito la derivazione nel calcolo dei sequenti che corrisponde all'albero a blocchi sviluppato nel precedente Esempio 3:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \to q, p, r \supset r\ [\mathrm{Ax}] \qquad \dfrac{p, r \supset p, q[\mathrm{Ax}] \quad p, q, r \supset q[\mathrm{Ax}]}{p \to q, p, r \supset q}[\to\mathrm{A}]}{p \to q, p, r \supset r \wedge q}[\wedge\mathrm{C}]}{p \to q, p \supset r \wedge q, \neg r}[\neg\mathrm{C}]}{p \to q \supset r \wedge q, p \to \neg r}[\to\mathrm{C}]$$

Evidentemente si ottiene una derivazione nel calcolo dei sequenti solo quando l'albero a blocchi è chiuso (ai blocchi foglie corrispondono assiomi del calcolo dei sequenti). La corrispondenza tra il metodo dell'albero semantico a blocchi e il calcolo dei sequenti consente di trasferire al calcolo dei sequenti le proprietà di correttezza e completezza dimostrate a proposito del metodo dell'albero semantico.

Esercizi Relativi alla Parte I

Non suddividiamo gli esercizi a seconda dei capitoli in quanto alcuni di essi possono essere svolti in più modi, con tecniche esposte in momenti differenti del testo. L'ordine degli esercizi, comunque, segue abbastanza fedelmente lo sviluppo della trattazione.

1. Discutere se il connettivo biargomentale "ma" è o non è vero-funzionale. Aiutandosi con esempi stabilire se il connettivo biargomentale "a meno che" è vero funzionale e, in caso affermativo, esprimerlo in funzione di "se..., allora..." e "non".

2. Aiutandosi con le due proposizioni:

   "Napoleone è francese, mentre Mazzini è italiano"
   "Colombo ha scoperto l'America mentre Garibaldi marciava su Trento"

   stabilire se il connettivo "mentre" è vero-funzionale.

3. Stabilire, con opportuni esempi, che i connettivi monoargomentali seguenti non sono vero-funzionali (il valore di verità di A non determina univocamente il valore di verità della proposizione composta): "È possibile che A"; "È necessario che A"; "Marcello crede che A"; "Michele sa che A"; "È ben noto che A".

4. Discutere se, nelle seguenti proposizioni, la disgiunzione è inclusiva (non esclusiva) o esclusiva:

   (*a*) "In certe fermate il tram ferma solo se vi sono persone che devono scendere oppure salire";
   (*b*) "Giovanni si iscriverà a matematica oppure a fisica";
   (*c*) "Al concorso sono ammessi cittadini italiani oppure coniugi di cittadini italiani";
   (*d*) "Paolo sposerà Marina oppure Gabriella".

5. Aldo, Bruno e Carlo sono tre studenti che hanno sostenuto un esame. Ponendo:

   $$\begin{aligned} p &= \text{“Aldo ha superato l'esame”} \\ q &= \text{“Bruno ha superato l'esame”} \\ r &= \text{“Carlo ha superato l'esame”} \end{aligned}$$

   determinare le proposizioni composte che traducono i seguenti enunciati:

   (*a*) "Solo Carlo ha superato l'esame";
   (*b*) "Solo Aldo non ha superato l'esame";
   (*c*) "Solo uno di Aldo, Bruno e Carlo ha superato l'esame";
   (*d*) "Almeno uno di Aldo, Bruno e Carlo ha superato l'esame";
   (*e*) "Almeno due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l'esame";
   (*f*) "Al più due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l'esame";

(g) "Esattamente due tra Aldo, Bruno e Carlo hanno superato l'esame".

6. Angelo, Bruno e Carlo sono gli unici tre membri di una commissione che vota una proposta. Ponendo:

$$\begin{array}{lcl} p & = & \text{“Angelo vota a favore della proposta”} \\ q & = & \text{“Bruno vota a favore della proposta”} \\ r & = & \text{“Carlo vota a favore della proposta”} \end{array}$$

determinare le proposizioni composte che traducono i seguenti enunciati:

(a) "La votazione è stata unanime";
(b) "La proposta è passata a maggioranza";
(c) "La proposta ha ricevuto un numero dispari di voti";
(d) "La proposta è stata respinta, ma non all'unanimità";
(e) "La proposta è stata respinta con il voto contrario di Bruno";

7. Se i valori di verità, anziché **V** e **F**, sono indicati con i numeri 0 e 1 (ossia si pone $v(A) = 1$ anziché $v(A) = \mathbf{V}$ e $v(A) = 0$ anziché $v(A) = \mathbf{F}$), verificare che:

(a) $v(\neg A) = 1 - v(A)$
(b) $v(A \wedge B) = v(A) \times v(B)$
(c) $v(A \vee B) = v(A) + v(B) - v(A) \times v(B)$
(d) $v(A \to B) = 1 - v(A) + v(A) \times v(B)$
(e) $v(A \leftrightarrow B) = v(A) \times v(B) + (1 - v(A)) \times (1 - v(B)) = 1- \mid v(A) - v(B) \mid$

8. Con le notazioni dell'Esercizio 7 e sfruttando l'interdefinibilità dei connettivi, determinare le funzioni aritmetiche relative a:

(a) $v(A + B)$
(b) $v(A \mid B)$
(c) $v(A \uparrow B)$

9. Considerare il connettivo triargomentale Φ tale che $\Phi(A, B, C) = \mathbf{V}$ se e solo se un numero dispari tra A, B e C sono vere. Scrivere la tavola di verità del connettivo ed esprimerlo mediante la base $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Ripetere l'esercizio ma con il connettivo quadriargomentale.

10. Esprimere i connettivi $\wedge$, $+$ e $\uparrow$ in funzione di $\mid$.

11. Esprimere i connettivi $\vee$, $+$ e $\mid$ in funzione di $\uparrow$.

12. Determinarne il connettivo principale delle seguenti fp:

(a) $(\neg(p \wedge (\neg p)))$
(b) $((\neg p) \wedge (\neg(\neg p)))$
(c) $(\neg(\neg(p \to (\neg q))))$
(d) $((p \vee (\neg q)) \to (\neg r))$
(e) $(p \vee ((\neg q) \to (\neg r)))$
(f) $((p \to q) \wedge (q \to (\neg p)))$
(g) $((((\neg p) \to q) \vee r) \to (\neg q))$
(h) $(((p \vee q) \vee r) \to (p \vee (q \vee r)))$
(i) $(((p \to q) \to (q \to p)) \vee (\neg(p \vee s)))$
(l) $((((p \vee (\neg q)) \to r) \to r) \to (p \wedge q))$

(*m*) $(((((\neg(p \wedge q)) \vee q) \to (r \to q)) \wedge q) \wedge ((\neg q) \vee p))$
(*n*) $(((((\neg p) \vee q) \wedge q) \to (r \to q)) \vee (q \wedge ((\neg q) \vee p)))$
(*o*) $((((((\neg p) \vee (q \vee p)) \to r) \to q) \vee q) \wedge ((\neg q) \vee p))$
(*p*) $((((\neg p) \vee (q \wedge p)) \to r) \to (q \vee (q \wedge ((\neg q) \vee p))))$
(*q*) $((((\neg p) \vee (q \wedge p)) \to r) \to (((q \vee q) \wedge (\neg q)) \vee p))$
(*r*) $((((\neg p) \vee (q \wedge p)) \to r) \to ((q \vee q) \wedge ((\neg q) \vee p)))$

13. Stabilire quali delle seguenti espressioni sono fp:

(*a*) $(p \vee (p \to \neg q))$
(*b*) $((\neg p) \vee (p \to (\neg q)))$
(*c*) $(p \wedge q) \to \neg q)$
(*d*) $((((p \to q) \vee (r \to t)) \to (\neg q)) \to r)$
(*e*) $(((((p \to q) \to (\neg(p \to q) \to r) \to r) \wedge q)$
(*f*) $((p \wedge (\neg q)) \to (((r \wedge (q \vee r)) \to (\neg q)))$
(*g*) $((p \wedge (\neg q)) \to ((r \wedge (q \vee r)) \to q))$
(*h*) $((((p \wedge q) \vee (r \vee s)) \to (\neg(p \vee q))) \wedge (q \vee (\neg r)))$
(*i*) $(((\neg p) \vee (\neg q)) \to (p \to (q \to (r \to (s \to p)))))$
(*l*) $((p \vee q) \to (\neg(q \to (r \vee s))))$
(*m*) $(((((p \to (r \vee s)) \wedge q) \wedge r) \to r) \to t)$

14. Abbreviare le fp dell'Esercizio 13 sopprimendo le parentesi inessenziali.

15. Ripristinare le parentesi nelle seguenti fp scritte in forma abbreviata:

(*a*) $p \to \neg q$
(*b*) $\neg p \to \neg q$
(*c*) $\neg(p \to \neg q)$
(*d*) $p \wedge q \to \neg r \vee q$
(*e*) $p \wedge (q \to \neg r \vee q)$
(*f*) $(p \wedge q \to \neg r) \vee q$
(*g*) $(p \wedge (q \to \neg r)) \vee q$
(*h*) $p \wedge q \to \neg(r \vee q)$
(*i*) $(p \to q \vee \neg r) \to q$
(*l*) $(p \to q) \vee (\neg r \to q)$
(*m*) $p \to (q \vee \neg r \to q)$
(*n*) $p \leftrightarrow q \vee r$
(*o*) $p \to q \vee (r \leftrightarrow \neg p)$

16. Determinare la tavola di verità delle fp di cui all'Esercizio 15.

17. Stabilire se le seguenti fp sono o non sono tautologie:

(*a*) $((p \to q) \to q) \vee \neg p$
(*b*) $((p \to q) \to q) \to \neg p$
(*c*) $(p \to q \wedge \neg q) \to \neg p$
(*d*) $((p \to q) \to r) \to ((r \to p) \to (s \to p))$
(*e*) $(p \leftrightarrow p \wedge \neg p) \leftrightarrow \neg p$
(*f*) $(p \to r) \wedge (q \to s) \to (\neg r \vee \neg s \to \neg p \vee \neg q)$
(*g*) $(p \vee (q \vee r)) \to (p \to (q \to r))$

(h) $((p \to q) \to \neg(q \to p)) \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$
(i) $(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow \neg q)$
(l) $\neg p \to (p \vee q \to q)$
(m) $p \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q))$
(n) $(p \vee q \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \vee (q \to r))$

18. Verificare che le fp elencate nel §2.3 del Cap. 2 sono tautologie.

19. Stabilire se $A \models B$ e/o se $B \models A$ nei seguenti casi:

(a)	$A = \neg(p \wedge q)$	$B = \neg(p \vee q)$
(b)	$A = p \vee (q \wedge r)$	$B = (p \vee q) \wedge r$
(c)	$A = p \to (q \to (p \to q))$	$B = q \to (p \to (q \to p))$
(d)	$A = (p \vee q) \wedge r$	$B = p \vee q$
(e)	$A = \neg(p \vee q)$	$B = \neg q$
(f)	$A = p \vee (q \leftrightarrow r)$	$B = p \vee q \leftrightarrow p \vee r$
(g)	$A = p$	$B = (p \to q) \to p$
(h)	$A = (p \to q) \to (q \to p)$	$B = (p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \vee p)$
(i)	$A = \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg r)$	$B = p \wedge q \to \neg r$
(l)	$A = p \wedge q \to \neg r$	$B = p \wedge \neg q \to r$

20. Data la fp A:

(a) $(p \to q) \wedge \neg(p \wedge q)$
(b) $(p \to q) \vee (q \to p)$
(c) $p \wedge \neg p$
(d) $(p \to r) \wedge (q \to r)$

determinare almeno tre fp che siano conseguenza logica di A.

21. Verificare che vale $X \models A$ nei seguenti casi:

(a)	$X = \{p \to q, q \to r, \neg r\}$	$A = \neg p$
(b)	$X = \{p \vee \neg r, p \to q, r\}$	$A = q$
(c)	$X = \{p \to \neg q, \neg q \to \neg r\}$	$A = p \to \neg r$
(d)	$X = \{p \to (q \to \neg p), p \leftrightarrow q\}$	$A = \neg q \vee \neg p$
(e)	$X = \{q \vee r, p \to q, q \to p\}$	$A = p \vee r$
(f)	$X = \{p \to q, q \to r, r \to s, \neg s, p \vee t\}$	$A = t$
(g)	$X = \{(p \vee q) \wedge (r \vee s), (p \to r) \wedge (q \to s), \neg r\}$	$A = s$
(h)	$X = \{p \to q, \neg r \to (s \to t), r \vee (p \vee s), \neg r\}$	$A = q \vee t$
(i)	$X = \{p \to q, p \vee (r \wedge q), s \to \neg r, \neg(p \wedge q)\}$	$A = \neg s \vee \neg q$
(l)	$X = \{\neg p \wedge \neg q, p \vee q\}$	$A = r$
(m)	$X = \{p \to q \vee r, \neg q \to r \wedge \neg s\}$	$A = r \to r$
(n)	$X = \{p \wedge q \to r, \neg s \to \neg(t \to u), r \to (t \to u)\}$	$A = p \to (q \to s)$

22. Verificare che non vale $X \models A$ nei seguenti casi:

(a)	$X = \{p \to q, r \to s, p \vee s\}$	$A = q \vee r$
(b)	$X = \{\neg(p \wedge q), \neg p \wedge \neg q \to r \wedge s, s \to t\}$	$A = t$
(c)	$X = \{p \vee \neg q, \neg(\neg r \wedge \neg s), \neg(\neg p \wedge \neg s)\}$	$A = \neg q \to r$
(d)	$X = \{p \to (q \vee r), q \to (s \vee t), t \to u, \neg(u \vee s)\}$	$A = \neg p$
(e)	$X = \{p \leftrightarrow (q \vee r), q \leftrightarrow (r \vee p), r \leftrightarrow (p \vee q), \neg p\}$	$A = q \vee r$
(f)	$X = \{p \to q, q \to r, r \to p, p \to \neg r\}$	$A = p \wedge \neg q$
(g)	$X = \{p \vee q, p \to \neg r\}$	$A = p \vee (\neg r \leftrightarrow q)$

23. Verificare se vale $X \models A$ nei seguenti casi:

(a)	$X = \{(p \to q) \to p\}$	$A = p$
(b)	$X = \{p\}$	$A = (p \to q) \to p$
(c)	$X = \{p\}$	$A = (p \to q) \to q$
(d)	$X = \{p \to q, q \vee r\}$	$A = p \vee q$
(e)	$X = \{p \vee q, p \to \neg r\}$	$A = p \to (\neg r \leftrightarrow q)$
(f)	$X = \{p \wedge q \to r, \neg s \to \neg(t \to u), r \to (t \to u)\}$	$A = p \to (q \to s)$
(g)	$X = \{p \to q, r \to \neg q, (s \to \neg p) \to r\}$	$A = \neg t \vee p \to (t \to s)$
(h)	$X = \{p \vee (q \to r), s \to (r \to t), p \to \neg s, s\}$	$A = q \to t$
(i)	$X = \{\neg p \vee \neg q \to r, s \wedge \neg r\}$	$A = p \vee q$
(l)	$X = \{\neg p \wedge \neg q, (r \to p) \leftrightarrow \neg q, s\}$	$A = s \wedge r$
(m)	$X = \{q \vee r \to p, \neg q, p \wedge \neg r\}$	$A = \neg p$
(n)	$X = \{p \vee \neg(q \wedge r), \neg q, \neg(p \vee r)\}$	$A = p \vee q$
(o)	$X = \{p \vee \neg(q \vee r), \neg q, \neg(p \vee \neg r)\}$	$A = p$

24. Verificare che il seguente insieme X di fp non è soddisfacibile:

    (a) $X = \{p \vee q \to r \wedge s, \neg r, p\}$
    (b) $X = \{p \to q, r \to \neg q, \neg(p \to \neg r)\}$
    (c) $X = \{p \to q, \neg(p \to p \wedge q)\}$
    (d) $X = \{p \to q, p \wedge q \to r, \neg(p \wedge r), p\}$
    (e) $X = \{p \to q, (p \to r) \to s \wedge q, p \wedge q \to r, \neg s, p\}$
    (f) $X = \{p \vee q \to r, q \vee r \to (p \to (s \leftrightarrow t)), p \wedge s, \neg(s \leftrightarrow t)\}$
    (g) $X = \{(p \vee \neg q) \vee s, \neg p \vee (\neg p \wedge q), \neg(q \to s)\}$
    (h) $X = \{p \to q, q \to (p \to r \vee s), r \leftrightarrow s, \neg(r \wedge s), p\}$
    (i) $X = \{p \wedge q \to \neg r, r \vee (s \wedge t), p \leftrightarrow q, \neg(p \to s)\}$
    (l) $X = \{(p \vee q) \wedge r, \neg s \to \neg(q \wedge r), q \to (p \to \neg t), t \wedge \neg s\}$

25. Data la fp:

    (a) $\neg(p \wedge q) \to q \vee r$
    (b) $\neg(\neg q \to p \vee q)$
    (c) $p \vee (q \to r \wedge \neg p)$
    (d) $\neg p \leftrightarrow (q \to r)$
    (e) $\neg(p \leftrightarrow q)$
    (f) $\neg p \wedge (q \to p)$
    (g) $\neg p \to \neg(q \wedge r)$

    trasformarla in una logicamente equivalente che contiene:

    (i) solo i connettivi $\neg$, $\wedge$
    (ii) solo i connettivi $\neg$, $\vee$
    (iii) solo i connettivi $\neg$, $\to$

26. Dimostrare che:

    (a) se $A \models B$ e $C \models \neg B$, allora $\models \neg(A \wedge C)$;
    (b) se $A \models B$ e $\neg A \models C$, allora $\models B \vee C$;
    (c) se $X \models A$ e $\models A \leftrightarrow B$, allora $X \models B$;
    (d) se $\models A \leftrightarrow B$ e $A \models C$, allora $B \models C$;
    (e) se NonSod $X \cup \{A\}$ e NonSod $X \cup \{\neg A\}$, allora NonSod X.

27. Dimostrare i Teoremi dal 2.4.5 al 2.4.11 del §2.4 del Cap. 2.

28. Stabilire le regole per la costruzione dell'albero semantico per nodi del tipo V$[A \leftrightarrow B]$ e F$[A \leftrightarrow B]$.

29. Stabilire le regole per la costruzione dell'albero semantico per nodi del tipo V$[A + B]$ e F$[A + B]$.

30. Verificare se i seguenti ragionamenti sono corretti.

    (*a*) Se Carlo ha vinto la gara, allora Mario è arrivato secondo oppure Sergio è arrivato terzo. Mario è arrivato secondo. Quindi, se Carlo ha vinto la gara, allora Sergio non è giunto terzo.

    (*b*) Se Carlo ha vinto la gara, allora Mario è arrivato secondo oppure Sergio è arrivato terzo. Sergio non è arrivato terzo. Quindi, se Mario non è arrivato secondo, allora Carlo non ha vinto la gara.

    (*c*) Se Carlo ha vinto la gara, allora Mario è arrivato secondo e Sergio è arrivato terzo. Mario non è arrivato secondo. Pertanto Carlo non ha vinto la gara.

    (*d*) Se Carlo ha vinto la gara, allora, se Mario è arrivato secondo, allora Sergio è arrivato terzo. Mario non è arrivato secondo. Quindi, o Carlo ha vinto o Sergio è arrivato terzo.

    (*e*) Se farà bel tempo andremo a passeggio. Se staremo in casa giocheremo a carte. O andremo a passeggio o staremo in casa. Quindi, o farà bel tempo o giocheremo a carte.

    (*f*) Se giochi e studi supererai gli esami, ma se giochi e non studi non supererai gli esami. Pertanto, se giochi, allora o studi e supererai gli esami o non studi e non supererai gli esami.

    (*g*) L'attacco riuscirà solo se il nemico è colto di sorpresa o se la posizione è poco difesa. Il nemico non sarà colto di sorpresa a meno che non abbia ricevuto rinforzi. Se la posizione è poco difesa allora il nemico non ha ricevuto rinforzi. Quindi l'attacco non riuscirà.

    (*h*) Se Bianchi non ha incontrato Rossi la notte scorsa, allora o Rossi era l'assassino o Bianchi mente. Se Rossi non era l'assassino, allora Bianchi non ha incontrato Rossi la notte scorsa e il delitto è avvenuto dopo mezzanotte. Se il delitto è avvenuto dopo la mezzanotte, allora o Rossi era l'assassino o Bianchi mente. Perciò Rossi era l'assassino.

    (*i*) Se l'investimento dei capitali rimane costante, allora cresceranno le spese del governo oppure si verificheranno fenomeni di disoccupazione. Se non aumenteranno le spese del governo, potranno essere ridotte le tasse. Se le tasse potranno essere ridotte e l'investimento dei capitali rimane costante, non si avranno fenomeni di disoccupazione. Quindi aumenteranno le spese del governo.

    (*l*) La Juventus ha vinto la partita o il Milan, se ha giocato in casa, ha vinto la partita. Se l'Inter ha vinto, allora se il Milan ha vinto, il Milan è campione d'Italia. Se la Juventus ha vinto, allora l'Inter ha perso. L'Inter ha vinto. Quindi, se il Milan ha giocato in casa, allora è campione d'Italia.

    (*m*) Se il Milan vince la partita, allora Juventus e Inter saranno in seconda posizione. Se la Juventus o l'Inter è in seconda posizione sarà necessario uno spareggio. Quindi, se il Milan vince, sarà necessario uno spareggio.

    (*n*) Se il Milan vince la partita, allora Juventus o Inter saranno in seconda posizione. Se Juventus e Inter saranno in seconda posizione, allora sarà necessario uno spareggio. Quindi, se il Milan vince, sarà necessario uno spareggio.

    (*o*) Se il quadrilatero Q' è un rombo, allora almeno uno dei due triangoli T' e T'' è isoscele. Se T' è isoscele, allora Q' non è un rombo. Se il quadrilatero Q'' è un rombo, allora T'' non è isoscele. Quindi, se Q' è un rombo, allora Q'' non lo è.

(*p*) Se nessuno dei due triangoli T' e T'' è isoscele, allora il quadrilatero Q' è un rombo. Se T' è isoscele, allora Q' è un rombo. Se il quadrilatero Q'' non è un rombo, allora T'' non è isoscele. Quindi, se Q' non è un rombo, allora Q'' lo è.

31. Date le seguenti proposizioni:

(*a*) "Se Aldo andrà alla gita, anche Bruno ci andrà"
(*b*) "Bruno o Carlo, ma non entrambi, andranno alla gita"
(*c*) "O Dario o Elfio o entrambi andranno alla gita"
(*d*) "Dario e Carlo andranno entrambi alla gita o nessuno dei due andrà"
(*e*) "Se Elfio andrà alla gita, anche Aldo e Dario andranno alla gita"

si può dedurne chi andrà e chi non andrà alla gita?

32. Nel calcolo assiomatico del §4.2, Cap. 4, dimostrare che:

(*a*) $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$
(*b*) $\vdash (\neg A \to A) \to A$
(*c*) $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$
(*d*) $A \to (B \to C), A, \neg C \vdash \neg B$
(*e*) $A \to (B \to C) \vdash B \to (C \to A)$
(*f*) $A \to B \vdash (\neg A \to \neg C) \to (C \to B)$
(*g*) $A \vdash (\neg(B \to C) \to \neg A) \to (\neg C \to \neg B)$
(*h*) $A \to (B \to C) \vdash \neg(A \to \neg B) \to C$
(*i*) $A \to B, C \to B, \neg A \to C \vdash B$
(*l*) $A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$
(*m*) $A, B \vdash \neg(A \to \neg B)$

33. Un sistema assiomatico classico (sostanzialmente quello di Hilbert-Bernays) assume come primitivi i cinque connettivi $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ e i seguenti quindici schemi di assiomi:

1) $A \to (B \to A)$
2) $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$
3) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
4) $A \wedge B \to A$
5) $A \wedge B \to B$
6) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$
7) $A \to A \vee B$
8) $B \to A \vee B$
9) $(A \to B) \to ((C \to B) \to (A \vee C \to B))$
10) $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$
11) $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$
12) $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$
13) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
14) $A \to \neg\neg A$
15) $\neg\neg A \to A$

e come unica regola il *Modus Ponens* MP.

Dimostrare l'equivalenza tra questo calcolo assiomatico e quello presentato nel §4.2 del Cap. 4 (ossia, dato che in entrambi l'unica regola è MP, che in ciascuno dei due sono derivabili, opportunamente tradotti, gli assiomi dell'altro).

34. Nel sistema di Kleene si assumono quattro connettivi primitivi ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) e i seguenti dieci schemi di assiomi:

1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3) $A \wedge B \rightarrow A$
4) $A \wedge B \rightarrow B$
5) $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B))$
6) $A \rightarrow A \vee B$
7) $B \rightarrow A \vee B$
8) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
9) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
10) $\neg\neg A \rightarrow A$

e l'unica regola è il *Modus Ponens* MP.

Dimostrare l'equivalenza tra questo calcolo assiomatico e quello presentato nel §4.2 del Cap. 4 (ossia che in ciascuno dei due sono derivabili gli assiomi dell'altro).

Se si sostituisce 10) con 10') $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (che è derivabile da 1)-10)) si ottiene la logica proposizionale intuizionista.

Dimostrare che in quest'ultima logica non sono derivabili il principio del terzo escluso ($A \vee \neg A$) e la legge di doppia negazione $\neg\neg A \rightarrow A$ sfruttando il procedimento seguente.

Introduciamo tre valori di verità 0, 1 e 2 e le seguenti tavole per i connettivi:

A	$\neg A$
0	0
1	1
2	0

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	1
1	1	0
2	1	0
0	2	2
1	2	2
2	2	0

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	1
2	0	2
0	1	1
1	1	1
2	1	2
0	2	2
1	2	2
2	2	2

A	B	$A \vee B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	0
1	1	1
2	1	1
0	2	0
1	2	1
2	2	‘2

Verificare che tutti gli assiomi della logica intuizionista hanno sempre valore 0 e che il *Modus Ponens*, se applicato a due fp di valore 0, ha come conclusione una fp di valore 0. Osservare che $A \vee \neg A$ e $\neg\neg A \rightarrow A$ non hanno sempre valore 0 e dedurne che non sono teoremi della logica intuizionista.

35. In una diversa assiomatizzazione del calcolo proposizionale si assumono come connettivi primitivi $\neg$ e $\rightarrow$ e i seguenti sei schemi di assiomi:

1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
4) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
5) $A \rightarrow \neg\neg A$
6) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg B)$

e come unica regola il *Modus Ponens* MP.

Dimostrare l'equivalenza tra questo calcolo assiomatico e quello presentato nel §4.2 del Cap. 4 (ossia che in ciascuno dei due sono derivabili gli assiomi dell'altro). Se si sopprime 3) si ottiene la logica intuizionista (cfr.l'Esercizio 34) e, se si sopprime anche 6) si ottiene la logica minimale.

36. Si considerino le due seguenti tavole a tre valori (relative ai due connettivi $\neg$ e $\to$ scelti come base del nostro calcolo assiomatico) che indichiamo con 0, 1 e 2:

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Verificare che, qualsiasi siano i valori di A, B e C (0, 1 o 2), gli schemi di assiomi (A2) e (A3) assumono sempre valore 0. Verificare che, se A e $A \to B$ hanno valore 0, allora anche B ha valore 0. Si osservi che, se A vale 1 e B vale 2, allora $A \to (B \to A)$ vale 2. Dedurne che lo schema (A1) non può essere derivato assumendo come assiomi solo gli schemi (A2) e (A3) e come regola MP, ossia che (A1) è indipendente da (A2) e (A3).

37. Per dimostrare l'indipendenza di (A2) da (A1) e (A3) ripetere un ragionamento analogo a quello dell'Esercizio 36, sostituendo i valori di $\neg A$ con, nell'ordine, $1, 0, 1$ e quelli di $A \to B$ con $0, 0, 0, 2, 2, 0, 1, 0, 0$.

38. Se A è una fp, indichiamo con $n(A)$ la fp ottenuta da A sopprimendo tutti i segni di negazione. Si osservi che, applicando n a un qualsiasi esempio di (A1) o di (A2), si ottiene ancora un esempio di (A1) o (A2) (e quindi una tautologia). Si verifichi che, se $n(A \to B)$ e $n(A)$ sono tautologie, allora anche $n(B)$ è una tautologia. Si osservi che, invece, se si applica n ad un esempio di (A3) non si ottiene in generale una tautologia. Dedurne che lo schema di assiomi (A3) non è derivabile assumendo come assiomi (A1) e (A2) e come regola MP, ossia che (A3) è indipendente da (A1) e (A2).

39. Nel calcolo della deduzione naturale, dimostrare l'eliminabilità delle seguenti regole:

Regola di introduzione della disgiunzione negli antecedenti [$\vee$**I**]:

$$\frac{\begin{array}{c} A_1, \ldots, A_m, A \quad C \\ B_1, \ldots, B_h, B \quad C \end{array}}{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h, A \vee B \quad C}$$

Regola di eliminazione della disgiunzione dagli antecedenti [$\vee$**E**]:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m, A \vee B \quad C}{A_1, \ldots, A_m, A \quad C} \qquad \frac{A_1, \ldots, A_m, A \vee B \quad C}{A_1, \ldots, A_m, B \quad C}$$

Regola di eliminazione del condizionale dagli antecedenti [$\to$**E**]:

$$\frac{A_1, \ldots, A_m, A \to B \quad C}{A_1, \ldots, A_m, B \quad C} \qquad \frac{A_1, \ldots, A_m, A \to B \quad C}{A_1, \ldots, A_m, \neg A \quad C}$$

40. Qualora il bicondizionale $\leftrightarrow$ fosse assunto come primitivo, formulare le quattro regole di eliminazione e di introduzione del bicondizionale nel conseguente e negli antecedenti.

41. Derivare le seguenti sequenze nel calcolo della deduzione naturale:

   - $(a)\ \vdash \qquad \neg(p \lor p) \lor p$
   - $(b)\ \vdash \qquad \neg p \lor (p \lor q)$
   - $(c)\ \vdash p \lor q \qquad q \lor p$
   - $(d)\ \vdash \qquad \neg(p \lor q) \lor (q \lor p)$
   - $(e)\ \vdash p \land (q \land r) \qquad (p \land q) \land r$
   - $(f)\ \vdash p \to (q \to r), p \to q \qquad p \to r$
   - $(g)\ \vdash p \lor q \qquad \neg(\neg p \land \neg q)$
   - $(h)\ \vdash \neg(\neg p \land \neg q) \qquad p \lor q$
   - $(i)\ \vdash p \land (q \lor r) \qquad (p \land q) \lor (p \land r)$
   - $(l)\ \vdash p \to q, r \to \neg q \qquad p \to \neg r$
   - $(m)\ \vdash p \to (q \to r) \qquad q \to (p \to r)$
   - $(n)\ \vdash p \to (q \to r) \qquad \neg r \to (p \to \neg q)$
   - $(o)\ \vdash p \to q, r \to q \qquad (\neg p \to r) \to q$
   - $(p)\ \vdash p \to q \qquad \neg(p \land \neg q)$
   - $(q)\ \vdash \neg(p \land \neg q) \qquad p \to q$
   - $(r)\ \vdash p \lor q \to r \qquad p \to r$
   - $(s)\ \vdash p \to q, p \land q \to r, p \qquad p \land r$

42. In virtù del teorema di completezza, per ciascuna delle dodici relazioni di conseguenza logica dell'Esercizio 21, si ottiene una sequenza derivabile nel calcolo della deduzione naturale. Derivarne qualcuna.

43. Dimostrare direttamente la correttezza delle regole eliminabili proposte nel testo.

44. Risolvere alcuni degli Esercizi proposti in 17, 19, 21 e 24 mediante alberi a blocchi. Scrivere la corrispondente derivazione nel calcolo dei sequenti.

45. Dimostrare la correttezza delle regole del calcolo dei sequenti presentato nel §4.4 del Cap. 4.

Risposte e Suggerimenti per Alcuni degli Esercizi

1. In genere "ma", dal punto di vista della vero-funzionalità, si comporta come la congiunzione "e". "A a meno che B" significa solitamente "se non B, allora A".

2. Nella prima proposizione "mentre" (come "ma"), è vero-funzionale e si comporta come "e"; nella seconda proposizione "mentre" non è vero-funzionale, poiché la verità della proposizione composta non dipende solo dal valore di verità delle proposizioni componenti, ma anche dalla loro contemporaneità. Analogamente non sono in genere vero-funzionali i connettivi "quando", "prima", "dopo" poiché la verità delle proposizione composta dipende dal periodo di tempo in cui valgono le proposizioni componenti. Così non sono in genere vero-funzionali i connettivi biargomentali "a causa di", "poiché", perché", dato che la verità della proposizione composta è subordinata al sussistere di un nesso tra i contenuti delle proposizioni componenti.

3. Se A è vera, "È possibile che A" è senz'altro vera, ma, se A è falsa, non si può stabilire il valore di verità di "È possibile che A" senza entrare nel merito dei contenuti di A; ad esempio possiamo ritenere vera "È possibile che vi sia vita su Marte" anche se sapessimo con sicurezza che non vi è vita su Marte, ma riteniamo falsa "È possibile che $2 + 2 = 3$". Ragionare in modo analogo per gli altri connettivi.

4. In a) e c) la disgiunzione è inclusiva. Nei casi b) e d) è esclusiva. Si può osservare comunque che spesso la decisione non è agevole in quanto, se le proposizioni disgiunte non possono essere entrambe vere, viene a mancare il caso che discrimina le due disgiunzioni; così, nei casi b) e d), siamo portati a dire che la disgiunzione è esclusiva poiché sappiamo che uno studente non può iscriversi a due corsi di laurea e che un uomo non può sposare due donne. Il più delle volte per decidere questo tipo di questioni occorre conoscere l'intenzione di chi esprime la proposizione. Se si vuole eliminare l'ambiguità, nel caso della disgiunzione inclusiva si può specificare: "A o B, o entrambi" (talvolta si scrive A e/o B), e nel caso di quella esclusiva: "A o B, ma non entrambi". Si verifichi che $(A \vee B) \vee (A \wedge B)$ e $(A + B) + (A \wedge B)$ sono entrambe logicamente equivalenti a $A \vee B$ e che $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ e $(A + B) \wedge \neg(A \wedge B)$ sono entrambe logicamente equivalenti a

$A + B$.

5. (a) $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
   (b) $\neg p \wedge q \wedge r$
   (c) $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
   (d) $p \vee q \vee r$
   (e) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
   (f) $\neg(p \wedge q \wedge r)$
   (g) $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

6. (a) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
   (b) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$
   (c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
   (d) $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
   (e) $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

17. Sono tautologie: (a), (c), (d), (e), (f), (h), (i), (l), (m) e non lo sono: (b), (g), (n).

19. (a) $B \models A$; (b) $B \models A$; (c) $A \models B$ e $B \models A$; (d) $A \models B$; (e) $A \models B$; (f) $A \models B$ e $B \models A$; (g) $A \models B$ e $B \models A$; (h) $A \models B$ e $B \models A$; (i) e (l) né $A \models B$, né $B \models A$.

23. Il nesso di conseguenza logica sussiste in: (a), (b), (c), (f), (g), (h), (o) e non sussiste nei rimanenti.

30. Sono corretti: (b), (c), (f), (l), (m), (o), (p) e non sono corretti gli altri: (a), (d), (e), (g), (h), (i), (n)

31. Solo Dario e Carlo andranno alla gita.

32. Il lettore ricordi che un risultato di derivabilità può essere ottenuto con derivazioni molto diverse, magari più brevi ed eleganti di quelle qui proposte.

(a)	(1)	A	(ipotesi)
	(2)	$A \to ((A \to B) \to B)$	(da $A, A \to B \vdash B$ e teorema di deduzione)
	(3)	$(A \to B) \to B$	(da (1) e (2) per MP)
	(4)	$\neg B \to \neg(A \to B)$	(da (3) per contrapposizione)

Da $A \vdash \neg B \to \neg(A \to B)$ segue $\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ per il teorema di deduzione.

(b)	(1)	$(\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))) \to$ $((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A)))$	(A2)
	(2)	$\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))$	(per 2 del §4.2: $\vdash \neg A \to (A \to B)$)
	(3)	$(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A))$	(da (1) e (2) per MP)
	(4)	$\neg A \to A$	(ipotesi)
	(5)	$\neg A \to \neg(\neg A \to A)$	(da (3) e (4) per MP)
	(6)	$(\neg A \to A) \to A$	(da (5) per contrapposizione)
	(7)	A	(da (4) e (6) per MP)

Da $(\neg A \to A) \vdash A$ segue $\vdash (\neg A \to A) \to A$ per il teorema di deduzione[18].

(c)	(1)	$A \to B$	(ipotesi)
	(2)	$\neg A \to B$	(ipotesi)
	(3)	$\neg B \to \neg\neg A$	(da (2) per contrapposizione)
	(4)	$\neg\neg A \to A$	(per 3.§4.2)
	(5)	$\neg B \to A$	(da (3) e (4) per concatenazione)
	(6)	$\neg B \to B$	(da (1) e (5) per concatenazione)
	(7)	$(\neg B \to B) \to B$	(esercizio (b) precedente)
	(8)	B	(da (6) e (7) per MP)

da $A \to B, \neg A \to B \vdash B$ segue ...

(d)	(1)	$A \to (B \to C)$	(ipotesi)
	(2)	A	(ipotesi)
	(3)	$B \to C$	(da (1) e (2) per MP)
	(4)	$\neg C \to \neg B$	(da (3) per contrapposizione)
	(5)	$\neg C$	(ipotesi)
	(6)	$\neg B$	(da (4) e (5) per MP)

(e) Si ottiene facilmente $A \to (B \to C), A, B \vdash C$ da cui ...

(f) Il lettore giustifichi i passaggi e completi la dimostrazione:

(1) $A \to B$
(2) $\neg A \to \neg C$
(3) $C \to A$
(4) C
(5) A
(6) B

(g) Come nell'esercizio precedente il lettore giustifichi i passaggi e completi:

(1) $\neg(B \to C) \to \neg A$
(2) $A \to (B \to C)$
(3) A
(4) $B \to C$
(5) $\neg C \to \neg B$
(6) $\neg C$
(7) $\neg B$

(h) Segue facilmente da (d).

(i)	(1)	$A \to B$ (ipotesi)	
	(2)	$(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$	(Esercizio (c))
	(3)	$(\neg A \to B) \to B$	(da (1) e (2) per MP)
	(4)	$\neg A \to C$	(ipotesi)
	(5)	$C \to B$	(ipotesi)
	(6)	$\neg A \to B$	(da (4) e (5) per concatenazione)
	(7)	B	(da (3) e (6) per MP)

[18] Nel seguito non sempre espliciteremo le applicazioni del teorema di deduzione.

(l)	(1)	$A \to B$	(ipotesi)
	(2)	$A \to \neg B$	(ipotesi)
	(3)	$\neg B \to \neg A$	(da (1) per contrapposizione)
	(4)	$\neg\neg B \to \neg A$	(da (2) per contrapposizione)
	(5)	$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg\neg B \to \neg A) \to \neg A)$	(Esercizio (c))
	(6)	$(\neg\neg B \to \neg A) \to \neg A$	(da (3) e (5) per MP)
	(7)	$\neg A$	(da (4) e (6) per MP)

(m)	(1)	A	(ipotesi)
	(2)	B	(ipotesi)
	(3)	$A \to (\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B))$	(esercizio (a))
	(4)	$\neg\neg B \to \neg(A \to \neg B)$	(da (1) e (3) per MP)
	(5)	$B \to \neg\neg B$	(già dimostrato)
	(6)	$B \to \neg(A \to \neg B)$	(da (4) e (5) per concatenazione)
	(7)	$\neg(A \to \neg B)$	(da (2) e (6) per MP)

33. Per dimostrare che tutte le fp derivabili nel sistema di Hilbert-Bernays sono derivabili anche nel calcolo del §4.2, basta dimostrare che i quindici schemi sono derivabili in esso. Gli schemi 1), 3), 13), 14) e 15) sono o assiomi o già stati dimostrati nel §4.2 e nell'esercizio precedente. Vediamo la derivabilità dei rimanenti:

2)	(1)	$A \to (A \to B)$	(ipotesi)
	(2)	$(A \to (A \to B)) \to ((A \to A) \to (A \to B))$	(A2)
	(3)	$(A \to A) \to (A \to B)$	(da (1) e (2) per MP)
	(4)	$A \to A$	(già dimostrato)
	(5)	$A \to B$	(da (3) e (4) per MP)

Da $A \to (A \to B) \vdash A \to B$, segue $\vdash (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$ per il teorema di deduzione.

4) $A \wedge B \to A$ si traduce in $\neg(A \to \neg B) \to A$

(1)	$\neg A \to (A \to \neg B)$	(da $\vdash \neg A \to (A \to B)$)
(2)	$\neg(A \to \neg B) \to \neg\neg A$	(da (1) per contrapposizione)
(3)	$\neg\neg A \to A$	(già dimostrato)
(4)	$\neg(A \to \neg B) \to A$	(da (2) e (3) per concatenazione)

5) $A \wedge B \to B$ si traduce in $\neg(A \to \neg B) \to B$, che si deriva facilmente da $\neg B \to (A \to \neg B)$ (A1) per contrapposizione.

6) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$ si traduce in $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to \neg(B \to \neg C))$

(1)	$A \to B$	(ipotesi)
(2)	$A \to C$	(ipotesi)
(3)	A	(ipotesi)
(4)	B	(da (1) e (3) per MP)
(5)	C	(da (2) e (3) per MP)
(6)	$\neg(B \to \neg C)$	(da (4) e (5) per esercizio (m) precedente)

7) $A \to A \vee B$ si traduce in $A \to (\neg A \to B)$ che si deriva facilmente:

(1) A	(ipotesi)
(2) $\neg A$	(ipotesi)
(3) $\neg A \to (A \to B)$	(già dimostrato)
(4) $A \to B$	(da (2) e (3) per MP)
(5) B	(da (1) e (4) per MP)

Da $A, \neg A \vdash B$ segue $\vdash A \to (\neg A \to B)$ per il teorema di deduzione.

8) $B \to A \vee B$ si traduce in $B \to (\neg A \to B)$ che è un caso di (A1).

9) $(A \to B) \to ((C \to B) \to (A \vee C \to B))$ si traduce in: $(A \to B) \to ((C \to B) \to ((\neg A \to C) \to B)))$, che si deriva applicando il teorema di deduzione alla (i) dell'Esercizio 32.

10) e 11), traducendo $A \leftrightarrow B$ con $(A \to B) \wedge (B \to A)$, rientrano in 4) e 5).

12) $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B))$ si traduce in: $(A \to B) \to ((B \to A) \to \neg((A \to B) \to \neg(B \to A)))$, che si ottiene facilmente dalla (m) dell'Esercizio 33 (ponendo $A \to B$ al posto di A e $B \to A$ al posto di B).

Per dimostrare il viceversa, cioè che le fp derivabili nel sistema del §4.2 sono derivabili anche nel sistema di Hilbert-Bernays, basta derivare in quest'ultimo sistema (A3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ (che è una forma di contrapposizione). Ciò si ottiene facilmente da 13) e dagli schemi della doppia negazione usando il teorema di deduzione (che si può dimostrare anche per il sistema di Hilbert-Bernays).

34 e 35. Cfr. la soluzione dell'Esercizio 33.

40.

$$[\mathrm{E}\leftrightarrow] \quad \frac{A_1, \ldots, A_m \qquad A \leftrightarrow B}{A_1, \ldots, A_m \qquad A \to B} \qquad\qquad \frac{A_1, \ldots, A_m \qquad A \leftrightarrow B}{A_1, \ldots, A_m \qquad B \to A}$$

$$[\mathrm{I}\leftrightarrow] \quad \frac{\begin{array}{ll} A_1, \ldots, A_m & A \to B \\ B_1, \ldots, B_h & B \to A \end{array}}{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_h \qquad A \leftrightarrow B}$$

$$[\leftrightarrow\mathrm{E}] \quad \frac{A_1, \ldots, A_m, A \to B, B \to A \qquad C}{A_1, \ldots, A_m, A \leftrightarrow B \qquad C}$$

$$[\leftrightarrow\mathrm{I}] \quad \frac{A_1, \ldots, A_m, A \leftrightarrow B \qquad C}{A_1, \ldots, A_m, A \to B, B \to A \qquad C}$$

41. Presentiamo alcune derivazioni. Il lettore tenga presente che la soluzione non è unica e completi le giustificazioni dei passaggi, ossia determini in base a quale regola è scritta ciascuna sequenza:

(a)	(1)	$p \vee p$	$p \vee p$	
	(2)	p	p	
	(3)	p	p	
	(4)	$p \vee p$	p	
	(5)	$p \vee p$	$\neg(p \vee p) \vee p$	
	(6)	$\neg(p \vee p)$	$\neg(p \vee p)$	
	(7)	$\neg(p \vee p)$	$\neg(p \vee p) \vee p$	
	(8)		$\neg(p \vee p) \vee p$	[Es] (5), (7)
(b)	(1)	$\neg p$	$\neg p$	
	(2)	$\neg p$	$\neg p \vee (p \vee q)$	
	(3)	p	p	
	(4)	p	$p \vee q$	
	(5)	p	$\neg p \vee (p \vee q)$	
	(6)	p	$\neg p \vee (p \vee q)$	[Es] (2),(7)
(c)	(1)	p	p	
	(2)	p	$q \vee p$	
	(3)	q	q	
	(4)	q	$q \vee p$	
	(5)	$p \vee q$	$p \vee q$	
	(6)	$p \vee q$	$q \vee p$	[E$\vee$] (2),(4),(5)
(f)	(1)	$p \to (q \to r)$	$p \to (q \to r)$	
	(2)	$p \to q$	$p \to q$	
	(3)	p	p	
	(4)	$p \to (q \to r), p$	$q \to r$	
	(5)	$p \to q, p$	q	
	(6)	$p \to (q \to r), p \to q, p$	r	
	(7)	$p \to (q \to r), p \to q$	$p \to r$	
(g)	(1)	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	
	(2)	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p$	
	(3)	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg q$	
	(4)	p	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	
	(5)	q	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	
	(6)	$p \vee q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	[$\vee$I] (4),(5) (vedi Esercizio 40)

(h)	(1)	p	p
	(2)	p	$p \vee q$
	(3)	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$
	(4)	q	q
	(5)	q	$p \vee q$
	(6)	$\neg(p \vee q)$	$\neg q$
	(7)	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
	(8)	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$

(m)	(1)	$p \to (q \to r)$	$p \to (q \to r)$
	(2)	p	p
	(3)	$p \to (q \to r), p$	$q \to r$
	(4)	q	q
	(5)	$p \to (q \to r), p, q$	r
	(6)	$p \to (q \to r), q$	$p \to r$
	(7)	$p \to (q \to r)$	$q \to (p \to r)$

(n)	(1)	$p \to (q \to r)$	$p \to (q \to r)$
	(2)	p	p
	(3)	$p \to (q \to r), p$	$q \to r$
	(4)	q	q
	(5)	$p \to (q \to r), p, q$	r
	(6)	$p \to (q \to r), p, \neg r$	$\neg q$
	(7)	$p \to (q \to r), \neg r$	$p \to \neg q$
	(8)	$p \to (q \to r)$	$\neg r \to (p \to \neg q)$

(o)	(1)	$p \to q$	$p \to q$
	(2)	p	p
	(3)	$p \to q, p$	q
	(4)	$\neg p \to r$	$\neg p \to r$
	(5)	$\neg p$	$\neg p$
	(6)	$\neg p \to r, \neg p$	r
	(7)	$r \to q$	$r \to q$
	(8)	$r \to q, \neg p \to r, \neg p$	q
	(9)	$p \to q, r \to q, \neg p \to r$	q
	(10)	$p \to q, r \to q$	$(\neg p \to r) \to q$

(p)	(1)	$p \to q$	$p \to q$
	(2)	p	p
	(3)	$p \to q, p$	q
	(4)	$p, \neg q$	$\neg(p \to q)$
	(5)	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \to q)$
	(6)	$p \to q$	$\neg(p \wedge \neg q)$

(q)	(1)	p	p
	(2)	$\neg q$	$\neg q$
	(3)	$p, \neg q$	$p \wedge \neg q$
	(4)	$\neg(p \wedge \neg q), p$	$\neg\neg q$
	(5)	$\neg(p \wedge \neg q), p$	q
	(6)	$\neg(p \wedge \neg q)$	$p \to q$

Parte II

La logica dei Predicati del Primo Ordine

Capitolo 5

La sintassi e la semantica della logica dei predicati

5.1 Introduzione

Nella prima parte abbiamo introdotto un linguaggio artificiale $\mathcal{L}$ con il quale si possono formalizzare le proposizioni semplici del linguaggio naturale e le proposizioni composte a partire da esse mediante connettivi vero-funzionali, e ciò al fine di definire un nesso di conseguenza logica tra le forme proposizionali di $\mathcal{L}$ che consenta di studiare la correttezza di alcune forme di ragionamento. Abbiamo poi introdotto un metodo algoritmico (quello degli alberi semantici) per il riconoscimento del sussistere di proprietà e relazioni semantiche (essere tautologia, essere soddisfacibile, essere conseguenza logica) e alcuni calcoli (assiomatici, della deduzione naturale, dei sequenti) per rendere più meccanico il rinvenimento delle tautologie e delle conseguenze logiche di un insieme di forme proposizionali. Mediante le dimostrazioni dei teoremi di correttezza e di completezza si è evidenziata la totale adeguatezza di tali calcoli per i fini per i quali sono stati costruiti e la loro sostanziale equivalenza.

Mediante il linguaggio della logica proposizionale si possono formalizzare solo ragionamenti la cui correttezza si basa sui nessi tra le proposizioni semplici, senza alcun riferimento al loro contenuto. In questa parte intendiamo predisporre un linguaggio più articolato che consenta di studiare la correttezza di un numero molto più ampio di ragionamenti logici.

5.2 La sintassi della logica dei predicati del primo ordine

5.2.1 Costanti individuali e predicative

Consideriamo alcuni esempi di proposizioni semplici del linguaggio naturale:

(a) "Carlo è studente"
(b) "3 è un numero naturale"
(c) "Dario è padre di Elisa"
(d) "Stefano è più alto di Emilio"
(e) "4 è il doppio di 2"
(f) "Savona è tra Genova e Imperia"
(g) "8 è il prodotto di 2 e 4"
(h) "8 è la somma di 4 e 4"
(i) "I punti A, B C e D sono vertici di un quadrato"

(*j*) "La squadra del Milan che ha vinto la coppa dei campioni nel 1990 è stata formata dai giocatori Galli, Maldini, Tassotti, Ancelotti, Costacurta, Baresi, Donadoni, Rijkaard, Van Basten, Gullit, Evani"

In tutte queste proposizioni figurano dei nomi di individui (Carlo, 3, Dario, Elisa, ecc.) e la proposizione afferma o che un individuo ha una certa proprietà oppure che tra alcuni di essi sussiste una certa relazione. Il tipo di formalizzazione che si adotta in logica dei predicati consiste nell'indicare con lettere minuscole i nomi degli individui (costanti individuali) - in genere si usano lettere dell'inizio dell'alfabeto: a, b, c, d, $\ldots$, eventualmente con apici o indici - e con lettere maiuscole i nomi delle proprietà e delle relazioni (costanti predicative o simboli di predicato) - in genere si usano lettere maiuscole della seconda parte dell'alfabeto: P, Q, R, S, $\ldots$, anch'esse con eventuali apici o indici. Ciascuna costante predicativa è accompagnata da un numero naturale che indica a quante costanti individuali va applicata la costante predicativa. Come una proprietà è a un argomento, una relazione binaria è a due argomenti, una ternaria a tre, e così via, così una costante predicativa può essere a uno, due, tre argomenti, e così via. Per non appesantire la notazione lasceremo, ove possibile, sottinteso tale numero. I simboli di predicato si scrivono davanti alle costanti individuali ai quali si applicano.

Le proposizioni (a) e (b) possono essere formalizzate, ad esempio, con:

$$Pa, \text{ oppure } Qb, \text{ oppure } Pc,$$

dove la costante individuale - a, b o c - indica Carlo o il numero 3 e la costante predicativa - P o Q - indica la proprietà "essere studente" o "essere numero naturale".

Analogamente (c), (d) e (e) possono essere formalizzate con:

$$Rab, \text{ oppure } Sbc, \text{ oppure } Rcd$$

dove le costanti individuali indicano gli individui - Dario, Elisa, Stefano, Emilio, 4, 2 - mentre il simbolo di predicato - R o S - indica la relazione binaria "essere padre di ...", oppure "essere più alto di ...", oppure "essere doppio di ...".

Nelle proposizioni (f) e (g) sono presenti una relazione ternaria ("essere tra ... e ..." oppure "essere il prodotto di ... e di ...") e tre nomi di individui che la soddisfano, per cui la formalizzazione è del tipo:

$$Sabc, \text{ oppure } Rbcd$$

Anche nella (h) è presente una relazione ternaria ("essere la somma di ... e di ..."), ma l'individuo 4 è menzionato due volte, per cui la formalizzazione è:

Sabb, oppure Rbcc.

Nella (i) sono presenti una relazione quaternaria ("essere vertici di un quadrato") e quattro individui che la soddisfano, per cui la formalizzazione, ad esempio, è:

Rabcd.

Nella (l), infine, sono menzionati undici individui e una relazione tra essi a undici posti ("avere giocato in una certa squadra di calcio") e la formalizzazione richiede un simbolo di predicato a 11 posti seguito da 11 costanti individuali.

Per quanto riguarda l'uso delle costanti individuali e predicative è opportuno fin d'ora segnalare che nelle formule di L' costanti distinte possono anche denotare lo stesso individuo o lo stesso predicato.

Le espressioni costituite da un simbolo di predicato a n posti seguite da n costanti individuali sono dette proposizioni atomiche. Una notazione per esse è la seguente:

$$R_i^n t_1 t_2 \ldots t_n \ (*)$$

dove R_i^n è il simbolo di predicato (l'apice n indica il numero di argomenti, l'indice i è un numero variabile che serve a distinguere i vari simboli di predicato a n argomenti) e i t_i stanno (almeno per ora) per costanti individuali. Cercheremo di evitare per quanto possibile notazioni troppo pesanti e ricorreremo molto spesso a simboli di predicato senza apici e indici, quali quelli impiegati in precedenza. Le lettere P e Q, quindi, stanno ad esempio per R e R, mentre R e S stanno per R e R.

5.2.2 Costanti funzionali

In molte proposizioni gli individui non sono denotati direttamente attraverso il loro nome. Così se diciamo:

"Il padre di Giorgio è medico",

la proprietà "essere medico" è attribuita al padre di Giorgio, il quale non è menzionato mediante il suo nome (che può essere, ad esempio, Ernesto), ma appunto tramite il suo legame di paternità con Giorgio. Una formalizzazione con, ad esempio, Pa (dove P sta per "essere medico" e a sta per "il padre di Giorgio") non distinguerebbe la nostra proposizione da Ernesto è medico, mentre le due proposizioni hanno evidentemente diverso valore informativo e, quindi, non sono equivalenti dal punto di vista deduttivo. Il punto è che "il padre di ..." è una espressione di tipo funzionale (cioè, se applicata al nome di un individuo, ad esempio Giorgio, produce il nome di un altro individuo, appunto "il padre di Giorgio"), analoga a quelle di largo impiego nel linguaggio matematico ("il quadrato di ...", "la radice quadrata di ...", "il seno di ...", o anche a più argomenti, come "la somma di ... e di ...", "il prodotto di ... e di ..."[1], "il punto medio di ... e ..." (a due argomenti), il baricentro dei tre punti ..., ... e ... (a tre argomenti), e così via). Pertanto, si può ampliare il linguaggio inserendo dei simboli di funzione o costanti funzionali. Così, se indichiamo con f "il padre di ...", la precedente proposizione può essere formalizzata con:

$$P(f(a))$$

(dove, a ="Giorgio", f ="il padre di ..." e P ="essere medico").

Analogamente la proposizione:

"Il gatto di Mario è più affettuoso del cane di Marco"

si può formalizzare con:

$$R(f(a), g(b))$$

dove R = "essere più affettuoso di", f ="il gatto di ...", a ="Mario", g ="il cane di ...", b ="Marco".

La proposizione:

"Il prodotto di 4 e 5 è maggiore della somma di 5 e 7"

si può formalizzare con:

$$\mathrm{R(f(a,b),g(b,c))}$$

[1] Si noti la differenza tra "essere il prodotto di ... e di ...", che è una relazione a tre argomenti, come nell'esempio precedente (per cui "18 è il prodotto di 3 e 6" è una proposizione vera e "15 è il prodotto di 2 e 8" è una proposizione falsa) e "il prodotto di ... e di ..." che è una espressione funzionale a due argomenti ("il prodotto di 5 e 6" non è una proposizione - non è né vera, né falsa -, ma il nome di un individuo, cioè 30). Così "2 è la radice quadrata di 4" può essere formalizzata con Rab dove $a = 2$, $b = 4$ e R = "essere la radice quadrata di ...", mentre "la radice quadrata di ..." è una espressione funzionale ad un argomento (se applicata ad un individuo, un numero, produce un altro individuo, la radice quadrata del numero), per cui "la radice quadrata di 4" è un nome dell'individuo 2.

dove $R =$"essere maggiore di ...", $f =$"il prodotto di ... e di ...", $a =$"4", $b =$"5", $g =$ "la somma di ... e di ..." e $c =$ "7".

La proposizione:

"La radice quadrata di 25 è compresa tra il quadrato di 2 e 2 elevato alla terza"

si può formalizzare con:

$$S(f(a), g(b), h(b, c))$$

dove $S =$ "essere compreso tra", $f =$ "la radice quadrata di ...", $a =$ "25", $g =$ "il quadrato di ...", $b =$ "2", $h =$ "la potenza di base ... e esponente ...", $c =$ "3".

Mediante simboli di funzione si possono costruire espressioni che denotano individui articolate in modo più complesso. Così, ad esempio:

"Il padre dell'inquilino di Giorgio"

sarà formalizzato con una espressione del tipo:

$$f(g(a))$$

dove f ="il padre di ...", g =l'inquilino di ... e a ="Giorgio".

"La somma della radice quadrata di 16 e del prodotto di 5 con la radice quadrata di 9"

si formalizza con:

$$f(g(a), h(b, g(c)))$$

dove $f =$ "la somma di ... e di ...", $g =$ "la radice quadrata di ...", $a =$ "16", $h =$ "il prodotto di ... e di ...", $b =$ "5", $c =$ "9".

Nell'intento di proporre una trattazione in cui gli approfondimenti sono inseriti gradualmente, preferiamo per ora *rinunciare ai simboli di funzione*[2].

[2] I simboli di funzione sono particolarmente utili per formalizzare ragionamenti nel linguaggio naturale e nel linguaggio matematico (nel quale, come è noto, le funzioni rivestono un ruolo di assoluta preminenza), ma sono assai meno indispensabili per quanto riguarda la trattazione della logica in generale. Si può inoltre rilevare che, in linea di principio, si può del tutto fare a meno dei simboli di funzione in quanto una funzione è sempre una relazione di tipo particolare (ossia con la proprietà dell'univocità). Restando per semplicità al caso di una funzione ad un argomento, una funzione f istituisce una relazione tra il suo dominio A e il suo codominio B tale che ad ogni elemento a del dominio A è associato uno ed un solo elemento b del codominio B (e di solito si scrive $b = f(a)$). Nulla vieta di considerare tale funzione come una relazione R a due argomenti che lega gli elementi di A con quelli di B in modo che Rab equivalga a $b = f(a)$. Con alcuni accorgimenti tecnici si può vedere che, sostituendo i simboli di funzione con opportuni simboli di predicati, non si ha alcuna perdita di potere espressivo. L'idea è semplice: anziché "il padre di Giorgio è medico" formalizziamo "Ernesto è il padre di Giorgio e Ernesto è medico" ($Rab \wedge Pa$); anziché "Il gatto di Mario é più simpatico del cane di Marco" formalizziamo "Silvestro è il gatto di Mario e Fido è il cane di Marco e Silvestro è più simpatico di Fido ($R(a, b) \wedge S(c, d) \wedge T(a, c)$). Si può inoltre fare a meno di menzionare Ernesto, Silvestro e Fido (restando più fedeli a quanto appare esplicitamente nelle proposizioni iniziali), usando variabili e il quantificatore esistenziale - vedi più avanti nel §5.2.3 - per cui "il padre di Giorgio è medico" si formalizza con

$$\exists x \ (Rxa \wedge Px)$$

("vi è un individuo che è il padre di Giorgio e che è medico") e la seconda proposizione con

$$\exists x \exists y \ (Rxb \wedge Syd \wedge Txy)$$

("vi è un individuo che è il gatto di Mario e un altro che è il cane di Marco e il primo è più simpatico del secondo").

5.2.3 Quantificatori

Vi sono delle proposizioni semplici che non si lasciano inquadrare nel tipo di analisi finora svolta - ossia predicato a n posti applicato a n individui - in quanto in esse figurano solo predicati. Tra di esse le più semplici sono quelle che intervengono nei sillogismi aristotelici:

(a) "Tutti gli uomini sono mortali";
(b) "Non tutti i greci sono ateniesi";
(c) "Qualche uomo è fortunato";
(d) "Esiste un numero primo che non è dispari";
(e) "Alcuni triangoli isosceli sono equilateri";
(f) "Un triangolo equilatero è anche isoscele".

In queste proposizioni non vi sono nomi di individui, ma solo di predicati e l'affermazione riguarda la quantità di individui che soddisfano i predicati; più precisamente, nella prima si afferma che tutti gli individui che hanno la proprietà di essere uomo hanno la proprietà di essere mortale; nella seconda che vi sono degli individui che hanno la proprietà di essere greci senza al contempo godere della proprietà di essere ateniesi; nella terza che vi sono degli individui che hanno le proprietà di essere uomini e di essere fortunati; e così per le altre. Ciò che rende le precedenti frasi delle proposizioni (cioè suscettibili di essere vere o false) è la presenza delle parole "tutti", "qualche", "esiste", alcuni, dette *quantificatori* per la ragione appena espressa.

Nella logica dei predicati del primo ordine si introducono due soli quantificatori, il *quantificatore universale* - che corrisponde a "tutti", "ogni" e simili - e il *quantificatore esistenziale* - che corrisponde a "esiste", "almeno uno", "qualche" e analoghe - riferiti ad individui. Per formalizzare proposizioni contenenti il quantificatore universale, che si indica con $\forall$, e quello esistenziale, che si indica con $\exists$, occorre introdurre dei simboli, detti variabili individuali, per indicare individui generici; per essi usiamo le lettere minuscole della parte finale dell'alfabeto quali x, y, z, $\ldots$ (con eventuali apici e indici).

Le sei proposizioni precedenti si formalizzano come segue:

(a) $\forall x(Px \to Qx)$ – (per ogni individuo x, se x è un P (cioè uomo), allora x è un Q (cioè mortale));
(b) $\neg\forall x(Px \to Qx)$ o equivalentemente $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$ – (non per tutti gli individui x, se x è P (cioè Greco), allora x è Q (cioè Ateniese), che equivale logicamente a "esiste almeno un individuo che è Greco e non è Ateniese");
(c) $\exists x(Px \wedge Qx)$ – (vi è almeno un individuo x che è P (cioè uomo) e Q (cioè fortunato));
(d) $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$ – (vi è almeno un individuo x tale che x è P (cioè primo) e non è Q (cioè dispari));
(e) $\exists x(Px \wedge Qx)$ – (vi è almeno un P (cioè triangolo isoscele) che è anche Q (cioè triangolo equilatero));
(f) $\forall x(Px \to Qx)$ – ("un" significa "un qualsiasi" e quindi, per ogni individuo x, se x è un P (cioè triangolo equilatero), allora x è un Q (cioè triangolo isoscele)).

Con i quantificatori si possono formalizzare poi proposizioni più complesse di quelle precedenti. Vediamo qualche esempio con la relativa formalizzazione:

"Tutti i numeri maggiori di 5 sono anche maggiori di 10"	$\forall x(Rxa \rightarrow Rxb)$
"Per ogni numero ne esiste uno maggiore"	$\forall xyRxy$ [3]
"Nessun numero minore di 3 è compreso fra 5 e 10"	$\neg x(Rxa \wedge Sxbc)$
"Per due punti qualsiasi passa una retta"	$\forall x\forall y\exists z(Px \wedge Py \wedge Qz \wedge Rxz \wedge Ryz)$[4]
"Se un punto A sta fra due punti B e C, allora sta anche fra C e B"	$\forall x\forall y\forall z(Px \wedge Py \wedge Pz \rightarrow (Sxyz \rightarrow Sxzy))$
"Ogni numero pari è somma di due numeri primi"	$\forall x(Px \rightarrow \exists y\exists z(Qy \wedge Qz \wedge Sxyz))$
"Cambiando l'ordine degli addendi la somma non cambia"	$\forall x\forall y\forall z(Sxyz \leftrightarrow Sxzy)$[5]

Si osservi che tutte le proposizioni che abbiamo formalizzato mediante i quantificatori sono tutte proposizioni semplici che, nel calcolo proposizionale, avremmo dovuto indicare con lettere proposizionali. Vi sono nel linguaggio tanti altri quantificatori. Molti di essi[6] possono essere "recuperati" mentre altri[7] fuoriescono dalle possibilità di formalizzazione della logica dei predicati del primo ordine.

5.2.4 Il linguaggio della logica dei predicati

Il *linguaggio $\mathcal{L}$' della logica dei predicati del primo ordine* è costituito da un *alfabeto*, dall'insieme dei *termini* e dall'insieme delle *formule ben formate* (*fbf*).

L'*alfabeto* $\mathcal{A}$' è costituito dai seguenti ingredienti:

(a) un insieme numerabile I di costanti individuali:

$$I = \{a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, \ldots\}$$

(b) un insieme numerabile V di variabili individuali:

$$V = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots\}$$

(c) per ogni n un insieme P_n di costanti predicative a n argomenti:

$$P_n = R^1, R^2, R^3, R^4, \ldots$$

[5] Se si introduce anche il predicato P (essere numero) si ha:

$$\forall x(Px \rightarrow \exists y(Py \wedge Rxy))$$

[5] Con gli strumenti finora introdotti non siamo in grado di esprimere formalmente la proposizione "per due punti distinti passa una ed una sola retta", ossia non possiamo specificare che i punti sono distinti e che la retta è unica.

[5] Si ricordi che abbiamo deciso di rinunciare ai simboli di funzione per cui $Sxyz$ va letto "x è la somma di y e z" (e quindi abbiamo parafrasato la proposizione data con, per ogni x, y e z, x è la somma di y e z se e solo se x è la somma di z e y, la quale implica l'uguaglianza della somma di y e z e della somma di z e y). Con i simboli di funzione possiamo indicare con f la funzione di addizione e, avendo a disposizione anche il predicato di identità, si ottiene una formula più abituale: $\forall x\forall y(f(x, y) = f(y, x))$.

[6] Quali ad esempio, "esistono almeno due", "esistono almeno tre", "non più di cinque", "esattamente quattro" e in genere quelli che stabiliscono che almeno un certo numero, o non più di un certo numero, o esattamente un certo numero di individui hanno una certa proprietà.

[7] Un esempio è "la maggior parte di" ("La maggior parte dei matematici sono distratti"). Un altro è "tanti quanti" ("In questa stanza vi sono tanti uomini quante donne"). Altri ancora sono "pochi", "quasi tutti", ecc.

(d) un insieme $\mathcal{C}$ di simboli per connettivi vero-funzionali:

$$\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$$

(e) un insieme Q di simboli per quantificatori:

$$Q = \{\forall, \exists\}$$

(f) un insieme S di segni ausiliari (le parentesi tonde aperta e chiusa):

$$S = \{(,)\}$$

Useremo le lettere a, b, c, $\ldots$ come metavariabili per costanti individuali (ossia per indicare costanti individuali generiche di I) e, analogamente, useremo x, y, z, $\ldots$ come metavariabili per variabili individuali, ossia per elementi generici di V.

Definizione 5.2.1 (Termine) *Le costanti individuali e le variabili individuali sono dette* termini.

Per indicare termini generici useremo le metavariabili: t, t', t'', t_1, t_2, t_3, ... e, in questo contesto, le costanti individuali sono dette anche *termini chiusi.*

Definizione 5.2.2 (Formula atomica) *Si dicono formule atomiche tutte le espressioni del tipo:*

$$Rt_1t_2\ldots t_n$$

dove R è una costante predicativa a n argomenti e t_1, t_2, $\ldots$, t_n sono termini.

La definizione dell'insieme delle formule ben formate della logica dei predicati è di tipo induttivo, analoga a quella già incontrata nella logica proposizionale (e continueremo a usare A, B, C, $\ldots$ come metavariabili per formule ben formate).

Definizione 5.2.3 (Formula ben formata) *Un'espressione di $\mathcal{L}$' è una fbf se soddisfa una delle seguenti condizioni:*

F1 *Ogni formula atomica è una fbf*
F2 *Se A è una fbf, allora $(\neg A)$ è una fbf*
F3 *Se A e B sono fbf, allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ sono fbf*
F4 *Se A è una fbf e x è una variabile individuale, allora $(\forall x A)$ e $(\exists x A)$ sono fbf*
F5 *Nient'altro è una fbf.*

Per ogni *fbf* A vale una ed una sola delle seguenti condizioni:

1. A è una formula atomica;
2. esiste una ed una sola *fbf* B tale che $A = (\neg B)$;
3. esistono esattamente due *fbf* B e C ed un unico connettivo binario $\mathbf{b}$ ($\wedge$ o $\vee$ o $\rightarrow$) tali che $A = (B\ \mathbf{b}\ C)$;
4. esistono esattamente una *fbf* B, una variabile x e un quantificatore Q ($\forall$ o $\exists$) tali che $A = (Qx\ B)$.

Nel caso (2) si dice che la *fbf* A è una *negazione*; nel caso (3), se $\mathbf{b} = \wedge$, allora A è una *congiunzione*, se $\mathbf{b} = \vee$, allora A è una *disgiunzione*, se $\mathbf{b} =\rightarrow$, allora A è un condizionale; nel caso (4), se $Q = \forall$, allora A è una *formula quantificata universalmente*, se $Q = \exists$, allora A è una *formula quantificata esistenzialmente.* Se A è una *fbf* non atomica, allora il connettivo principale è $\neg$ nel caso (2), è $\mathbf{b}$ nel caso (3), mentre nel caso (4) è Q il simbolo logico principale. Nel caso (4) la variabile x è detta *indice del quantificatore* e la *fbf* B il *campo d'azione (o rango) del quantificatore.*

Come si è già visto a proposito del linguaggio della logica proposizionale, si può introdurre un algoritmo per stabilire se una espressione è una *fbf*. Continuiamo ad adottare le convenzioni che consentono di ridurre il numero delle parentesi: oltre alle clausole già adottate nel caso proposizionale, si stabilisce che i quantificatori leghino più strettamente dei connettivi proposizionali[8] (per cui il campo d'azione di un quantificatore è sempre la minima *fbf* che segue il suo indice). Ad esempio:

$$(((\forall x(\neg Rxa)) \land (\exists y Sby)) \to Rxy)$$

si scrive

$$\forall x \neg Rxa \land \exists y Sby \to Rxy$$

$$(\forall x(((\neg Rxa) \land (ySby)) \to Rxy))$$

si scrive

$$\forall x(\neg Rxa \land ySby \to Rxy)$$

$$(\forall x((\neg Rxa) \land (y(Sby \to Rxy))))$$

si scrive

$$\forall x(\neg Rxa \land y(Sby \to Rxy))$$

$$((\forall x(\neg Rxa)) \land (y(Sby \to Rxy)))$$

si scrive

$$\forall x \neg Rxa \land y(Sby \to Rxy)$$

Per dimostrare che tutte le *fbf* hanno una proprietà P è sufficiente dimostrare che:

1. tutte le formule atomiche hanno la proprietà P;
2. se la *fbf* A ha la proprietà P (ipotesi induttiva), allora la *fbf* $(\neg A)$ ha proprietà P;
3. se le *fbf* A e B hanno la proprietà P (ipotesi induttive), allora le *fbf* $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$ hanno la proprietà P;
4. se la *fbf* A ha la proprietà P (ipotesi induttiva), allora le *fbf* $(\forall x A)$ e $(\exists x A)$ hanno la proprietà P.

5.2.5 Variabili libere e vincolate. Sostituzione

Definizione. Una occorrenza di una variabile x in una *fbf* è detta vincolata se e solo se x è l'indice di un quantificatore oppure se essa è nel campo di azione di un quantificatore avente x come indice. Una occorrenza non vincolata di una variabile è detta una occorrenza libera. Si dice che una variabile x è libera in una *fbf* A se e solo se x ha almeno una occorrenza libera in A.

[8] Così, ad esempio, la *fbf*: $\forall x Px \land Qx$, va letta: $(\forall x Px) \land Qx$, ed è diversa da: $\forall x(Px \land Qx)$. Nel primo caso la x di Qx non è nel campo d'azione del quantificatore, mentre lo è nella seconda. La *fbf*: $\forall x Px \land Qx \to \exists y Rxy \lor Py$ si legge: $((\forall x Px) \land Qx) \to ((\exists y Rxy) \lor Py)$ e il connettivo principale è $\to$. Invece nella *fbf*: $\forall x(Px \land Qx) \to \exists y(Rxy \lor Py)$ il connettivo principale è sempre $\to$, ma la x di Qx è nel campo d'azione del quantificatore $\forall x$ e la y di Py è nel campo d'azione di $\exists y$ (mentre la x di Rxy non è nel campo d'azione di $\forall x$). Nella *fbf*: $\forall x(Px \land Qx \to \exists y Rxy) \lor Py$ il connettivo principale è $\lor$, tutte le x sono nel campo d'azione di $\forall x$ e la y di Py non è nel campo d'azione di $\exists y$. La *fbf*: $\forall x Px \land (Qx \to \exists y Rxy \lor Py)$ è una congiunzione, il campo d'azione di $\forall x$ è Px e il campo d'azione di $\exists y$ è Rxy, quindi la x di Qx e la x di Rxy non sono nel campo d'azione di $\forall x$, e la y di Py non è nel campo d'azione di $\exists y$. La *fbf*: $\forall x(Px \land Qx \to \exists y(Rxy \lor Py))$ è quantificata universalmente (non ha un connettivo principale, ma il simbolo logico principale è $\forall$), il campo d'azione di $\forall x$ è $(Px \land Qx \to \exists y(Rxy \lor Py))$ e quello di $\exists y$ è $(Rxy \lor Py)$ e tutte le variabili sono nel campo d'azione dei rispettivi quantificatori.

Esempio 5.2.1 Nella *fbf* (a) $\forall x \neg Rxa \wedge \exists y Sby \rightarrow Rxy$ (che è un condizionale) le prime due occorrenze di x sono vincolate (la prima perché è l'indice del quantificatore $\forall$, la seconda perché è nel campo d'azione di $\forall x$), mentre la terza occorrenza di x è libera (in quanto non è nel campo d'azione di un quantificatore avente x come indice; il campo di azione di $\forall x$ è $\neg Rxa$); analogamente le prime due occorrenze di y sono vincolate e la terza e libera. Le variabili x e y sono libere nella *fbf* (in quanto hanno almeno una occorrenza libera).

Nella *fbf* (b) $\forall x(\neg Rxa \wedge \exists y Sby \rightarrow Rxy)$ (che è universalmente quantificata) tutte le occorrenze di x sono vincolate (il campo d'azione di $\forall x$ è infatti $\neg Rxa \wedge \exists y Sby \rightarrow Rxy$), le prime due occorrenze di y sono vincolate e l'ultima libera (il campo d'azione di $\exists y$ è Sby). Quindi la variabile x non è libera nella *fbf*, mentre la y è libera.

Nella *fbf* (c) $\forall x(\neg Rxa \wedge \exists y(Sby \rightarrow Rxy))$ tutte le occorrenze sia di x che di y sono vincolate (il campo d'azione di $\forall x$ è $\neg Rxa \wedge \exists y(Sby \rightarrow Rxy)$, mentre quello di $\exists y$ è $Sby \rightarrow Rxy$). Né x né y sono libere nella *fbf*. *fbf* come la (c), che non contengono occorrenze libere di alcuna variabile, sono dette chiuse.

Nella *fbf* (d) $\forall x \neg Rxa \wedge \exists y(Sby \rightarrow Rxy)$ (che è una congiunzione) non vi sono occorrenze libere di y, ma l'ultima occorrenza di x è libera (il campo d'azione di $\forall x$ è $\neg Rxa$). La *fbf*, quindi, non è chiusa (è aperta).

Le *fbf* (e), (f), (h), (j), (k) e (l) sono chiuse in quanto in esse tutte le occorrenze delle variabili sono vincolate.

Nella *fbf* (g) $\forall x(Px \rightarrow \forall x(Rxy \vee \exists z Qy))$ le occorrenze di x sono vincolate, quelle di y sono libere (nessun quantificatore ha y come indice); si osservi anche che nella sottoformula $\exists z Qy$ la variabile z è solo nell'indice del quantificatore e non nel campo d'azione[9].

Infine, nella *fbf* (i) $(\forall x Px \vee Qx)$ le due prime occorrenze di x sono vincolate e la terza è libera (in quanto il campo d'azione di $\forall x$ è Px), e quindi la (i) è una *fbf* aperta.

Se si considerano tutte le *fbf* che abbiamo introdotto nel §5.2 per formalizzare le varie proposizioni del linguaggio naturale, si può facilmente constatare che esse sono tutte chiuse, ossia che non contengono alcuna occorrenza libera di qualche variabile. Questa circostanza non è affatto casuale: le *fbf* che contengono variabili libere non "traducono" proposizioni del linguaggio naturale. Se, ad esempio, Pa formalizza "2 è primo" la *fbf* Px sta per "... è primo"x, e se Rab formalizza "5 è maggiore di 3", Rax sta per "5 è maggiore di ...", Rxb per "... è maggiore di 3" e Rxy per "... è maggiore di ...", ossia espressioni del linguaggio naturale contenenti posti vuoti (dove vi sono i puntini), dette funzioni proposizionali poiché divengono proposizioni (e quindi suscettibili di essere vere o false) solo quando i posti vuoti sono riempiti con nomi di individui. È quindi del tutto evidente che a noi interessano in modo particolare le *fbf* chiuse (che formalizzano le proposizioni del linguaggio naturale) e non le *fbf* aperte (che stanno per funzioni proposizionali del linguaggio naturale). Tuttavia, data la definizione induttiva di *fbf*, per ottenere *fbf* chiuse con quantificatori bisogna passare attraverso *fbf* aperte. Per arrivare alle *fbf* chiuse $\forall x Px$, $\exists x Px$, $\forall x Rxa$, $\exists x Rxa$, $\forall x \forall y Rxy$, $\forall x \exists y Rxy$, $\exists y \forall x Rxy$ si deve iniziare con le *fbf* atomiche aperte Px, Rxa, Rxy e quantificare le variabili.

Definizione 5.2.4 (Proposizione) *Le fbf che non contengono libera alcuna variabile (ossia che non contengono alcuna occorrenza libera di qualsiasi variabile), ossia le fbf chiuse, sono dette* proposizioni *(o* enunciati*).*

Esempio 5.2.2 Sono esempi di proposizioni (oltre a tutte le *fbf* del §5.2): Pa; Rab; Raa; $\exists x Px$; $\forall x Rax$; $\exists x Rxx$; $\forall x(\neg Rxa \vee Scx)$; $Rab \wedge \forall x(Px \rightarrow Rxb)$; $\exists x(Px \rightarrow Qx)$; $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Sxy \vee Syx)$; $\forall x(Px \rightarrow \exists y(Py \wedge Rxy)) \vee \forall x \neg Px$; $\forall x(Rxa \rightarrow \exists x(Px \vee \forall y Qy))$[10]; $\forall x(\exists z Pz \rightarrow \exists y \forall x Rxy)$[11]; $\exists x \forall y \exists z(Rxy \wedge \neg Rzz)$.

[9] Questa è una vera e propria anomalia dovuta alla definizione induttiva delle *fbf*: quando si introduce un quantificatore con una variabile come indice non è richiesto che la variabile quantificata figuri libera nel campo d'azione del quantificatore (in tal caso si dice che la quantificazione è vuota).

Definizione 5.2.5 *Data una fbf A, con $A[x/a]$ intendiamo la fbf che si ottiene da A sostituendo ogni occorrenza libera della variabile x con la costante a. $[x/a]$ è detto operatore di sostituzione.*

Esempio 5.2.3 $Px[x/a] = Pa$; $Px[x/c] = Pc$; $Px[y/b] = Px$; $Rxy[x/a] = Ray$
$\forall xRxy[x/a] = \forall xRxy$; $\forall xRxy[y/a] = \forall xRxa$
$Px \vee Rxy \rightarrow \exists ySyb[x/a] = Pa \vee Ray \rightarrow \exists ySyb$
$Px \vee Rxy \rightarrow \exists ySyb[y/b] = Px \vee Rxb \rightarrow \exists ySyb$
$\forall xPx \vee \neg Rxy[x/c] = \forall xPx \vee \neg Rcy$; $\forall xPx \vee \neg Rxy[y/b] = \forall xPx \vee \neg Rxb$.

Si tenga presente che l'operatore di sostituzione lascia A inalterata se non vi sono occorrenze libere della variabile che si deve sostituire. Quindi, se A è una proposizione, per ogni x e per ogni a, $A[x/a] = A$. Nel caso in cui A ha occorrenze libere di una sola variabile x - in tal caso scriveremo spesso $A(x)$ -, sostituendo x con una costante a, la *fbf* $A[x/a]$ - che indicheremo spesso anche $A(a)$ - risulta una proposizione (senza più alcuna variabile libera).

Esempio 5.2.4

Se $A(x) = Rxb$	allora	$A(a) = Rab$ (e $A(b) = Rbb$)
Se $A(x) = Rxx$	allora	$A(b) = Rbb$ (e $A(c) = Rcc$)
Se $A(x) = \exists yRxy$	allora	$A(b) = \exists yRby$
Se $A(y) = \forall xRxy \vee \neg\exists xSyx$	allora	$A(a) = \forall xRxa \vee \neg\exists xSax$
Se $A(y) = \forall yPy \rightarrow xRxy$	allora	$A(b) = \forall yPy \rightarrow \exists xRxb$
Se $A(z) = \forall xy(Rxz \rightarrow Szy)$	allora	$A(a) = \forall x\exists y(Rxa \rightarrow Say)$
Se $A(x) = Px \vee \forall y(Rxy \rightarrow \exists xPx) \rightarrow (\exists xPx \wedge Qx)$,	allora	$A(a) = Pa \vee \forall y(Ray \rightarrow \exists xPx) \rightarrow (\exists xPx \wedge Qa)$.

5.3 La semantica della logica dei predicati

5.3.1 Interpretazioni

Scopo di questo paragrafo è quello di esaminare come si assegnano i valori di verità alle proposizioni del linguaggio $\mathcal{L}$'. Nella logica proposizionale il concetto fondamentale è quello di valutazione: mediante una valutazione si assegna un valore di verità alle lettere proposizionali e, una volta attribuito un valore di verità alle lettere, viene attribuito un valore di verità a tutte le fp composte attraverso i connettivi. Nella logica dei predicati il discorso è più complesso e può essere articolato in modi differenti. Ci soffermeremo su di un procedimento che consente di attribuire un valore di verità solo alle proposizioni (ossia alla *fbf* chiuse), che prima illustriamo tramite alcuni esempi. Iniziamo considerando proposizioni atomiche chiuse quali Pa, Qb, Rab, Rbc, Sabc, ecc. Come è intuitivamente ovvio, per poter dire se una di queste proposizioni è vera o falsa, occorre specificare a cosa si riferiscono le costanti individuali e predicative che occorrono in essa. Così, se a sta per il numero 2 e P significa "essere pari", allora Pa risulta vera (poiché 2 è pari), mentre, se a sta per il numero 4 e P significa "essere dispari", allora Pa risulta falsa (poiché 4 non è dispari); se a sta per 5, b sta per 7 e R significa "essere minore", Rab è vera (poiché 5 è minore di 7), mentre, se si mantiene lo stesso significato per a e b, e R significa "essere divisore", Rab è falsa (poiché 5 non è divisore di 7). Si tratta allora di generalizzare e precisare questo discorso. In primo luogo occorre fissare un dominio D, ossia un qualsiasi insieme non vuoto[12] relativamente al quale le nostre formule chiuse assumono un significato (intuitivamente: ogni formula chiusa diviene una affermazione relativa

[11]Si noti che in questa proposizione, come pure in quella precedente, la stessa variabile x è indice di due quantificatori. Nella proposizione precedente i due quantificatori con stesso indice hanno campi d'azione differenti - $Px \rightarrow \exists y(Py \wedge Rxy)$ e $\neg Px$ -, in questa il campo d'azione del primo quantificatore è $Rxa \rightarrow \exists x(Px \vee \forall yQy)$ (e vincola l'occorrenza libera di x in Rxa), mentre quello del secondo è $Px \vee \forall yQy$. È buona norma evitare i "mescolamenti" di variabili, ossia far comparire la stessa variabile sia libera che vincolata nella stessa *fbf*.

[11]Si osservi che il primo quantificatore è vuoto in quanto nel suo campo d'azione non vi è alcuna occorrenza libera di x. Dal punto di vista intuitivo le quantificazioni vuote sono del tutto inutili, come pure sono evitabili i "mescolamenti" di variabili cui si è accennato nella nota precedente. D'altra parte bisogna tenerne conto perché consentite dalla nostra definizione induttiva di *fbf*.

[12]Vi sono settori della logica in cui si ammette che l'insieme D possa anche essere vuoto. Si tratta delle cosiddette logiche inclusive. Torneremo più avanti su questo aspetto.

agli elementi di D). Una volta fissato il dominio, occorre "interpretare" le costanti individuali e predicative, ossia associare loro un significato relativamente a D. Consideriamo allora una funzione I (detta interpretazione) che ha come dominio le costanti individuali e predicative e il cui codominio va opportunamente specificato a seconda di quale tipo di costante si tratta. Per quanto riguarda le costanti individuali, come è intuitivamente ovvio, associamo a ciascuna di esse un elemento di D:

$$\boxed{\text{Per ogni costante individuale } a,\ I(a) \in D}$$

Se, ad esempio, $D = \{2, 3, 6, 7, 12, 13\}$, allora potrà essere $I(a) = 3$, $I(b) = 12$, $I(c) = 2, \ldots$. In un'altra interpretazione I' potrà essere $I'(a) = 6$, $I(b) = 13$, $I'(c) = 6, \ldots$ Evidentemente, dato che vi sono infinite costanti individuali, abbiamo infiniti modi diversi per interpretarle[13]. Una volta fissata una interpretazione I, ad ogni costante individuale del linguaggio è associato un ben preciso elemento di D.

Per quanto riguarda le costanti predicative, occorre distinguere a seconda del numero di argomenti della costante stessa. Se la costante predicativa è ad un argomento, ad essa si associa una proprietà in D. Così, se D, come nell'esempio precedente, è un insieme di numeri naturali, alla costante P ad un argomento si può associare la proprietà "essere pari", o "essere primo", o "essere multiplo di 3", ecc., mentre, se D è un insieme di persone, a P si può associare la proprietà "essere italiano", o "essere biondo", o "avere un peso superiore a 60 Kg", ecc. Il concetto di proprietà in un insieme può essere meglio specificato adottando, come è consueto in logica, il punto di vista estensionale in base al quale una proprietà in D si identifica con l'insieme degli elementi di D che la soddisfano.

Così, ad esempio, se $D = \{2, 3, 6, 7, 12, 13\}$, allora in D:

- Essere pari $= \{2, 6, 12\}$
- essere primo $= \{2, 3, 7, 13\}$
- essere multiplo di $3 = \{3, 6, 12\}$.

È chiaro allora che ogni proprietà espressa linguisticamente viene identificata con un sottoinsieme di D. Si assume che valga anche il viceversa, ossia che ogni sottoinsieme di D sia una proprietà in D. Così anche $\{2, 7, 12\}$, $\{6, 7, 13\}$, $\{2, 12\}$, $\{12\}$ sono proprietà in D (anche se tali sottoinsiemi non sono stati ottenuti come i precedenti mediante una proprietà usuale, quale "essere pari", "essere dispari", ecc.). Si assume pertanto che:

$$\boxed{\text{Proprietà in } D = \text{Sottoinsieme di } D}$$

Pertanto l'interpretazione di una costante predicativa P ad un posto sarà un sottoinsieme[14] di D:

$$\boxed{I(P) \subset D}$$

Questo discorso si può ora facilmente generalizzare. Se R è una costante predicativa a due argomenti, ad essa l'interpretazione I farà corrispondere una relazione binaria fra elementi di D.

[13] È importante sottolineare che a costanti distinte può essere associato lo stesso elemento di D. È altrettanto importante tener presente che una interpretazione è una funzione qualsiasi di codominio D e, quindi, non è detto che tutti gli elementi di D siano presi in considerazione dall'interpretazione. Ad esempio, potremmo associare a tutte le costanti individuali l'elemento 2 di D, oppure associare solo gli elementi 6 e 7 senza utilizzare gli altri.

[14] Se A è sottoinsieme di B si scrive, come è noto, $A \subset B$. L'insieme dei sottoinsiemi di un insieme A è detto insieme potenza di A, e si indica $\mathcal{P}(A)$. Secondo il punto di vista estensionale, dato un insieme A, l'insieme $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme delle proprietà in A. Quindi, l'interpretazione associa a ciascuna costante predicativa ad un argomento un sottoinsieme di D, ossia un elemento di $\mathcal{P}(D)$.

Ad esempio, se D è un insieme di numeri naturali, $I(R)$ può essere "essere minore di ...", o "essere maggiore di ...", o "essere multiplo di ...", o "essere primo con ...", ecc., mentre se D è un insieme di persone, ad R si può associare la relazione "essere più alto di ...", o "essere parente di ...", o "essere coetaneo di ...", ecc. Come abbiamo identificato una proprietà con il sottoinsieme formato dagli elementi che la soddisfano, così possiamo identificare la relazione in D con l'insieme delle coppie di elementi di D che la soddisfano.

Così, se $D = \{2, 3, 6, 7, 12, 13\}$, allora in D:

- Essere minore = {(2,3), (2,6), (2,7), (2,12), (2,13), (3,6), (3,7),(3,12),(3,13), (6,7), (6,12), (6,13), (7,12), (7,13), (12,13)}
- Essere maggiore = {(3,2), (6,2), (7,2), (12,2), (13,2), (6,3), (7,3), (12,3), (13,3), (7,6), (12,6), (13,6), (12,7), (13,7), (13,12)}
- Essere multiplo proprio = {(6,2),(6,3),(12,2),(12,3),(12,6)}
- Essere primo con = {(2,3), (3,2), (2,7), (7,2), (2,13), (13,2), (3,7), (7,3), (3,13), (13,3), (6,7), (7,6), (6,13), (13,6), (7,12), (12,7), (7,13), (13,7), (12,13), (13,1)}

L'insieme di tutte le coppie di elementi di D viene detto, in teoria degli insiemi, prodotto cartesiano, e si indica $D \times D$ o anche D^2.

Nell'esempio D^2 corrisponde al seguente insieme:

{(2,2), (2,3), (2,6), (2,7), (2,12), (2,13), (3,2), (3,3), (3,6), (3,7), (3,12), (3,13), (6,2), (6,3), (6,6), (6,7), (6,12), (6,13), (7,2), (7,3), (7,6), (7,7), (7,12), (7,13), (12,2), (12,3), (12,6), (12,7), (12,12), (12,13), (13,2), (13,3), (13,6), (13,7), (13,12), (13,13)}

Una relazione binaria è allora un sottoinsieme di D^2. Come in precedenza a proposito delle proprietà, diciamo che una relazione binaria in D è un qualsiasi sottoinsieme di D^2, ossia ogni insieme di coppie ordinate di elementi di D è una relazione binaria:

$$\boxed{\text{Relazione binaria in } D = \text{sottoinsieme di } D^2}$$

Quindi, l'interpretazione di una costante predicativa a due posti R sarà un sottoinsieme di D^2:

$$\boxed{I(R) \subset D^2}$$

Per le costanti predicative a più di due argomenti si procede in modo analogo. Se S è una costante predicativa a tre argomenti, ad essa l'interpretazione farà corrispondere una relazione ternaria fra elementi di D. Ad esempio, se D è un insieme di numeri, I(S) può essere "essere compreso tra ... e ...", o "essere la somma di ... e di ...", o "essere il prodotto di ... e di ...", ecc., mentre se D è un insieme di persone I(S) può essere "ha per genitori ... e ...", o ha un'altezza intermedia tra ... e ..., ecc. Come in precedenza, identifichiamo la relazione ternaria con un insieme di terne di elementi di D.

Così se $D = \{2, 3, 6, 7, 12, 13\}$, allora in D:

- Essere compreso = {(3,2,6), (3,2,7), (3,2,12), (3,2,13), (6,2,7), (6,2,12), (6,2,13), (6,3,7), ..., (12,2,13), (12,3,13), (12,6,13), (12,7,13)}
- Essere somma = {(6,3,3),(12,6,6),(13,6,7),(13,7,6)}
- Essere prodotto = {(6,2,3),(6,3,2),(12,2,6),(12,6,2)}

Si identifica quindi una relazione ternaria fra elementi di D con un sottoinsieme di D^3 (cioè l'insieme di tutte le terne di elementi di D), e pertanto, se S è un simbolo di predicato a tre argomenti:

$$\boxed{I(S) \subset D^3}$$

In generale, se R è un simbolo di predicato a n argomenti, ad esso l'interpretazione farà corrispondere una relazione n-aria su D, vale a dire un sottoinsieme di D^n:

$$\boxed{I(R^n{}_i) \subset D^n}$$

In definitiva, una interpretazione I associa a ciascuna costante individuale un elemento del dominio D e a ciascuna costante predicativa un sottoinsieme di $D, D^2, D^3, \ldots, D^n, \ldots$ a seconda del numero di argomenti della costante stessa.

5.3.2 Verità, soddisfacibilità, validità e equivalenza logica

Dato un dominio e una interpretazione, ossia la coppia $\langle D, I \rangle$, si può associare un valore di verità ad una qualsiasi proposizione atomica chiusa di $\mathcal{L}'$. Vediamo prima un esempio.

Esempio 5.3.1 Siano $D = \{2, 3, 6, 7, 12, 13\}$ e I tale che[15]:

$I(a) = 3$
$I(b) = 6$
$I(c) = 13$
$I(P) =$ essere pari $= \{2, 6, 12\}$
$I(Q) = \{2, 7, 12, 13\}$
$I(R) =$essere doppio $= \{(6, 3), (12, 6)\}$
$I(S) = \{(2, 2), (3, 6), (13, 3), (7, 12), (12, 7), (13, 13)\}$

La proposizione Pa è falsa in base a questa interpretazione in quanto $I(a)$, cioè 3, non è pari, non è elemento di $I(P)$. Invece Pb è vera in quanto $I(b)$, cioè 6, è pari,ossia è elemento di $I(P)$. Pc è falsa in quanto $I(c)$ non è in $I(P)$. Qa e Qb sono false in questa interpretazione in quanto né $I(a)$ (cioè 3), né $I(b)$ (cioè 6) sta in $I(Q)$, mentre Qc è vera poiché $I(c)$, cioè 13, è elemento di $I(Q)$.

Possiamo allora scrivere, in analogia con la notazione per la logica proposizionale: $I(Pa) = \mathbf{F}$, $I(Pb) = \mathbf{V}$, $I(Pc) = \mathbf{F}$, $I(Qa) = \mathbf{F}$, $I(Qb) = \mathbf{F}$, $I(Qc) = \mathbf{V}$. In effetti, quando la coppia $\langle D, I \rangle$ rende vera una proposizione A, usiamo la notazione $I \models A$ (anziché la più esatta $\langle D, I \rangle \models A$), che si legge I è modello di A. La proposizione Rab risulta falsa in quanto $I(a) = 3$ non è il doppio di $I(b) = 6$; più formalmente, la coppia $(I(a), I(b))$ non è elemento di $I(R)$. Invece, la coppia $(I(b), I(a))$, cioè $(6, 3)$, è elemento di $I(R)$, quindi Rba è vera rispetto alla nostra interpretazione ($I \models Rba$). Le proposizioni Raa, Rbb, Rac, Rca, Rbc, Rcb e Rcc sono tutte false rispetto a I. Sab, invece, risulta vera, in quanto la coppia $(I(a), I(b))$, cioè $(3, 6)$, è elemento di $I(S)$. Così risultano vere Sca e Scc in quanto le coppie $(I(c), I(a))$ e $(I(c), I(c))$, cioè $(13, 3)$ e $(13, 13)$, sono elementi di $I(S)$. Le altre proposizioni che contengono S, e cioè Saa, Sba, Sbb, Sac, Sbc e Scb, sono false.

L'esempio ha illustrato il significato della seguente:

Definizione 5.3.1 *Dato un dominio D e una interpretazione I su D, si dice che I* rende vera la (è modello della) proposizione atomica $Rt_1t_2 \ldots t_n$ *(dove i termini sono costanti individuali), e si scrive $I \models Rt_1t_2 \ldots t_n$, se e solo se la n-pla costituita dagli elementi di D associati ai termini $t_1, t_2, \ldots, t_n$, ossia $(I(t_1), I(t_2), \ldots, I(t_n))$, sta nella relazione associata a R, cioè appartiene a $I(R)$:*

[15] Come nel caso proposizionale, una valutazione assegna una valore di verità a tutte le lettere proposizionali, così nella logica dei predicati una interpretazione assegna un valore a tutte le costanti individuali e predicative. Come per valutare una fp composta della logica proposizionale è sufficiente conoscere i valori di verità attribuiti alle lettere che figurano in essa, così nella logica dei predicati, per assegnare un valore di verità alle proposizioni, è sufficiente conoscere come sono interpretate le costanti individuali e predicative (che vengono dette costanti extralogiche) che occorrono in essa. Nell'esempio, quindi, indichiamo come sono interpretate alcune costanti extralogiche e valutiamo solo *fbf* che contengono tali costanti.

$$I \models Rt_1t_2 \ldots t_n \iff (I(t_1), I(t_2), \ldots, I(t_n)) \in I(R_i^n) \quad (5.1)$$

Una volta stabilito quando una proposizione atomica è vera o falsa, dobbiamo estendere la definizione al caso in cui la proposizione contiene costanti logiche (connettivi e quantificatori). La nostra definizione è per induzione sul numero n di costanti logiche presenti nella proposizione (e il caso delle proposizioni atomiche è la base dell'induzione: in esse il numero delle costanti logiche è $n = 0$).

Se la proposizione A contenente n costanti logiche è una negazione, una congiunzione, una disgiunzione o un condizionale la definizione ricalca quella della logica proposizionale:

$$\text{Se } A = \neg B, \text{ allora } I \models A \iff \text{non } I \models B \ (I \not\models B) \quad (5.2)$$
$$\text{Se } A = B \land C, \text{ allora } I \models A \iff I \models B \text{ e } I \models C \quad (5.3)$$
$$\text{Se } A = B \lor C, \text{ allora } I \models A \iff I \models B \text{ o } I \models C \quad (5.4)$$
$$\text{Se } A = B \to C, \text{ allora } I \models A \iff I \not\models B \text{ o } I \models C \quad (5.5)$$

(si osservi che, se A è una proposizione, ossia non contiene libera alcuna variabile, anche B e C sono proposizioni e, per determinare se $I \models A$ siamo ricondotti a stabilire se $I \models B$ e $I \models C$, ossia a determinare se I è modello di proposizioni aventi un numero di costanti logiche minore di n).

Resta da esaminare il caso in cui A è una proposizione quantificata (universalmente o esistenzialmente).

Sia allora $A = \forall xB$. Se B non contiene x libera, ossia se la quantificazione è vuota, allora, essendo A una proposizione, lo è anche B; allora poniamo: $I \models A$ se e solo se $I \models B$ (e B ha una costante logica in meno rispetto ad A).

Supponiamo allora che B contenga x libera (e x è l'unica variabile libera di B, in quanto, se in B comparisse libera qualche altra variabile diversa da x, essa risulterebbe libera anche in A, che quindi non sarebbe una proposizione). Si tenga presente che, in questo caso, B è una *fbf* aperta e, quindi, $I \models B$ non è definito. Per aggirare questo ostacolo adottiamo un procedimento che prima illustriamo con alcuni esempi.

Esempio 5.3.2 Sia $D = \{4, 6, 8, 9, 12\}$ e consideriamo la proposizione $\forall xPx$. Se ricordiamo il significato intuitivo di $\forall$, vogliamo che essa sia vera se e solo se tutti gli elementi di D godono della proprietà su cui interpretiamo P (ad esempio "essere minore di 20", oppure "essere maggiore di 3", oppure "essere primo con 35"). In altre parole, si vuole che $\forall xPx$ sia vera in (D,I) se e solo se $I(P) = \{4, 6, 8, 9, 12\} = D$. Il problema che dobbiamo risolvere è quello di ricondurre l'essere I modello di $\forall xPx$ all'essere I modello di una proposizione avente un numero minore di costanti logiche. È evidente che se $I(P) = D$, allora I è modello delle proposizioni Pa, Pb, Pc, $\ldots$: qualsiasi siano $I(a)$, $I(b)$, $I(c)$, $\ldots$ essi sono elementi di D e quindi di $I(P)$. Purtroppo non vale il viceversa. In base a una interpretazione I tutte le proposizioni $Pa, Pb, Pc, \ldots$ possono essere vere e, tuttavia, $\forall xPx$ falsa (ad esempio, se $I(P) = \{4, 6\}$, allora $\forall xPx$ è falsa poiché $8, 9$ e 12 non godono di $I(P)$; tuttavia se poniamo $I(a) = 4$, $I(b) = 4$, $I(c) = 4$, $\ldots$, I è modello di $Pa, Pb, Pc, \ldots$). La ragione di ciò è evidente: I associa alle costanti $a, b, c, \ldots$ un elemento di D, ma non è detto che tutti gli elementi di D vengano coinvolti dalla interpretazione[16]. Per aggirare

[16] È molto impiegato nella letteratura questo procedimento (che noi non seguiremo): una volta fissato un dominio D, si aggiungono al linguaggio tante nuove costanti quanti sono gli elementi di D e si impone che queste nuove costanti siano obbligatoriamente interpretate sui corrispondenti elementi di D. In termini semplici, si aggiungono nomi per elementi di D in modo che tutti gli elementi di D siano "rappresentati" da una costante. In questo modo si può porre $I \models \forall xB(x)$ se e solo se $I \models B(k)$ per ogni costante k del linguaggio ampliato. Poiché D può essere infinito, anche più che numerabile, tale procedimento comporta l'introduzione di una quantità infinita, anche più che numerabile, di nuove costanti.

tale ostacolo, consideriamo un esempio della *fbf* Px, ad esempio Pa[17]. Per dichiarare vera $\forall xPx$ richiediamo che Pa sia vera comunque interpretiamo a, ossia facciamo variare $I(a)$ in D in tutti i modi possibili. In tal modo a viene interpretato via via in tutti gli elementi di D e, quindi, se Pa risulta sempre vera, siamo autorizzati a dichiarare vera $\forall xPx$. In definitiva possiamo dire che $\forall xPx$ è vera in I se e solo se è in I è vera Pa comunque si reinterpreti la costante a.

Consideriamo ora la proposizione $\forall xRxa$. Vogliamo dichiarare vera tale proposizione rispetto ad una interpretazione I di dominio D se e solo se ogni elemento k del dominio D ha la relazione associata ad R con l'individuo associato ad a. Quindi, ad esempio, se $I(a) = 6$, $\forall xRxa$ è vera in I se e solo se $I(R)$ contiene tutte le coppie $(4,6),(6,6),(8,6),(9,6),(12,6)$; se, invece, fosse $I(a) = 9$, $\forall xRxa$ è vera in I se e solo se $I(R)$ contiene le coppie $(4,9),(6,9),(8,9),(9,9),(12,9)$. Possiamo ottenere tale condizione eliminando da $\forall xRxa$ il quantificatore $\forall x$, sostituendo nella *fbf* aperta Rxa la variabile libera x con una costante, ad esempio b, e imponendo che la proposizione Rba ottenuta sia vera in I comunque si interpreti la costante b. In altre parole, se, facendo variare l'elemento associato a b, la proposizione Rba rimane vera, ciò significa che $I(R)$ contiene tutte le coppie $(k, I(a))$ al variare di k in D, cioè vale la condizione richiesta per dichiarare vera $\forall xRxa$. È importante osservare che abbiamo sostituito la variabile x con la costante b che non compare in Rxa. Se avessimo sostituito x con a (che già figura in Rxa) non avremmo ottenuto quanto auspicato. Infatti, la proposizione Raa è vera in I se e solo se la coppia $(I(a), I(a))$ è in $I(R)$ (ossia se $I(a)$ ha la relazione $I(R)$ con sé stesso). Facendo variare l'individuo associato alla costante a si ottiene la condizione che $I(R)$ contiene tutte le coppie $(4,4),(6,6),(8,8),(9,9),(12,12)$ e questa condizione non è quella prima individuata. Tale condizione, in effetti, corrisponde alla proposizione $\forall xRxx$ (la quale deve risultare vera in una interpretazione se e solo se $I(R)$ è riflessiva, cioè ogni individuo ha tale relazione con se stesso). Procedendo come sopra, eliminando il quantificatore, e sostituendo in Rxx la variabile libera x con a si ottiene Raa, e, imponendo che questa sia vera al variare del modo di interpretare a, si ha la condizione per dichiarare vera $\forall xRxx$. Ritornando a $\forall xRxa$ si può stabilire che $\forall xRxa$ è vera in I se e solo se è vera in I la proposizione Rba reinterpretando la costante b in tutti i modi possibili (e che $\forall xRxx$ è vera in I se e solo se in I è vera la proposizione Raa reinterpretando a in tutti i modi possibili).

La discussione svolta nell'Esempio precedente illustra il procedimento generale per dichiarare vera una proposizione del tipo $\forall xB(x)$: si elimina il $\forall x$ e si sostituisce ogni occorrenza libera della variabile x con una costante a che non compare in $B(x)$; si richiede che la proposizione ottenuta $B(a)$ sia vera in I e lo resti anche cambiando l'elemento di D associato ad a[18].

Definizione 5.3.2 *Data una qualsiasi interpretazione I di dominio D chiamiamo a-*reinterpretazione *di I (e la indichiamo con I_a) una qualsiasi interpretazione che coincide con I ovunque, salvo al più*[19] *per il modo di interpretare la costante a.*

Possiamo ora proseguire la nostra definizione induttiva di $I \models A$ contemplando il caso in cui A è quantificata universalmente: se $A = \forall xB$, allora, se a è una costante che non compare in A[20]:

$$\boxed{I \models A \iff I_a \models B[x/a] \text{ per ogni } a\text{-reinterpretazione di } I \qquad (5.6)}$$

[17] Vedremo tra poco che l'esempio va scelto con una precauzione.

[18] Il procedimento che abbiamo illustrato può apparire alquanto artificioso; si deve ricorrere al "trucco" di sostituire la variabile libera con una costante opportuna e poi far variare l'interpretazione di questa costante per passare in rassegna tutti gli elementi del dominio. Non si dimentichi tuttavia che, per poter procedere induttivamente, abbiamo la necessità di ricondurre la verità di una proposizione su quella di un'altra proposizione (ed è per questo che si sostituisce la variabile libera con la costante) avente un numero minore di costanti logiche, ed è su questa che ricade l'attribuzione della verità del "per ogni", per cui occorre che tale costante possa spaziare sull'intero dominio. Poiché l'interpretazione assegna un ben preciso elemento a ciascuna costante, occorre reinterpretare tale costante (ed è per questo che la costante va scelta "nuova", poiché non si vuole mutare il valore attribuito alle costanti che già figurano nella proposizione quantificata).

[19] In questo modo anche I risulta una a-reinterpretazione di I. Questo è importante poiché anche come I interpreta a va tenuto in considerazione.

[20] Si può dimostrare rigorosamente per induzione che il sussistere di $I \models A$ non dipende dalla costante non appartenente ad A scelta. È del resto intuitivamente evidente che tale costante svolge solo il ruolo di "segnaposto" e, quindi, un "segnaposto" vale l'altro (purché non già presente nella proposizione).

Il caso della proposizione quantificata esistenzialmente si tratta modificando quello per la proposizione quantificata universalmente. Il caso della quantificazione vuota si tratta come in precedenza (ossia come se il quantificatore non ci fosse). Anche qui vediamo prima qualche esempio.

Esempio 5.3.3 Sia $D = \{4, 6, 8, 9, 12\}$. Affinché la proposizione $\exists xPx$ sia vera in base ad una interpretazione I vogliamo che almeno un individuo del dominio abbia la proprietà $I(P)$. Quindi, se, ad esempio, $I(P) =$ "essere pari" $= \{4, 6, 8, 12\}$, $\exists xPx$ deve essere dichiarata vera, se $I(P) =$ "essere dispari" $= \{9\}$, $\exists xPx$ va nuovamente dichiarata vera, mentre se $I(P) =$ "essere multiplo di 5", allora $I(P)$ è vuoto e $\exists xPx$ va dichiarata falsa. Come per il caso della quantificazione universale, dobbiamo operare sulla *fbf* ottenuta eliminando il quantificatore $\exists x$, cioè Px, e farla diventare una proposizione sostituendo le occorrenze libere della variabile x con una costante che non compare in $\exists xPx$, ad esempio a; si ottiene Pa. L'interpretazione assegna ad a un elemento $I(a)$ di D. È chiaro che se $I \models Pa$ (ossia se $I(a)$ ha la proprietà $I(P)$), allora possiamo porre $I \models \exists xPx$. Tuttavia può darsi che $I(a)$ non abbia la proprietà $I(P)$, ma che la abbia un altro elemento k di D (e quindi che $\exists xPx$ vada dichiarata vera): se associamo alla costante a l'elemento k di D, $I(a) = k$ gode di $I(P)$. Quindi, per dichiarare vera $\exists xPx$, basta che una a-reinterpretazione di I renda vera Pa. Consideriamo ora la proposizione $\exists xRxa$ e nell'interpretazione I sia $I(a) = 9$. Per dichiarare vera $\exists xRxa$ basta che almeno un individuo k di D abbia la relazione $I(R)$ con 9, ossia che in $I(R)$ vi sia almeno una delle coppie $(4, 9), (6, 9), (8, 9), (9, 9), (12, 9)$. Supponiamo che $I(R) = \{(9, 8), (12, 9), (9, 12), (4, 9), (12, 12)\}$. In $\exists xRxa$ eliminiamo $\exists x$ e passiamo a Rba sostituendo la variabile x con la costante b. Per sapere se Rba è vera in I bisogna sapere quale individuo I associa a b, ma per dire che $\exists xRxa$ è vera basta una che una b-reinterpretazione di I renda vera Rba. Poiché se poniamo $I(b) = 12$, Rba risulta vera (la coppia $(I(b), I(a))$, cioè $(12, 9)$, è in $I(R)$), concludiamo che $\exists xRxa$ è vera in I. Se consideriamo la proposizione $\exists xRxx$, allora passiamo a Raa. Raa è falsa in I (poiché la coppia $(I(a), I(a))$, cioè $(9, 9)$, non è in $I(R)$), tuttavia nella a-reinterpretazione di I per cui $I(a) = 12$, Raa risulta vera (la coppia $(12, 12)$ è in $I(R)$), e questo ci è sufficiente per dichiarare che I rende vera $\exists xRxx$[21].

Si ha allora: Se $A = \exists xB$, allora, se a è una costante che non compare in A:

$$I \models A \iff I_a \models B[x/a] \text{ per almeno una } a\text{-reinterpretazione di } I \quad (5.7)$$

Per comodità riscriviamo la definizione induttiva di $I \models A$:

1. se $A = Rt_1t_2 \dots t_n$, allora $I \models A$ se e solo se $(I(t1), I(t2), \dots, I(tn)) \in I(R)$
2. se $A = \neg B$, allora: $I \models A$ se e solo se $I \not\models B$
3. se $A = B \wedge C$, allora $I \models A$ se e solo se $I \models B$ e $I \models C$
4. se $A = B \vee C$, allora $I \models A$ se e solo se $I \models B$ o $I \models C$ (o entrambe)
5. se $A = B \to C$, allora $I \models A$ se e solo se $I \not\models B$ o $I \models C$ (o entrambe)
6. $seA = \forall xB$, allora, se a è una costante che non compare in A:

   $$I \models A \text{ se e solo se } I_a \models B[x/a] \text{ per ogni } a\text{-reinterpretazione di } I$$

7. se $A = \exists xB$, allora, se a è una costante che non compare in A:

   $$I \models A \text{ se e solo se } I_a \models B[x/a] \text{ per almeno una } a\text{-reinterpretazione di } I$$

[21] Se, ad esempio, da $I(R)$ sopprimessimo la coppia $(12, 12)$, la proposizione $\exists xRxx$ risulterebbe falsa poiché nessuna a-reinterpretazione di I rende vera Raa.

Dato un dominio D e una interpretazione I su D, ossia se si sono interpretate tutte le costanti individuali e predicative, allora, data una qualsiasi proposizione A, o I è modello di A oppure I non è modello di A (e in tal caso, per definizione, I è modello di $\neg A$):

$$I \models A \text{ o } I \not\models A \text{ (e non entrambe le cose)}$$

In conformità con le notazioni impiegate nella logica proposizionale, se I è modello di A scriviamo anche $I(A) = V$ e, se non è modello di A, $I(A) = F$. Ci serviremo tuttavia solo sporadicamente di questa notazione.

Avendo a disposizione il concetto semantico di base, quello di verità o falsità di una proposizione in base ad una interpretazione su un dominio, possiamo riprendere tali e quali dal calcolo proposizionale le definizioni degli altri concetti semantici:

Definizione 5.3.3 (Modello) *Se X è un insieme di proposizioni, una interpretazione I su un dominio D è* modello *di X se è modello di tutte le proposizioni A di X (per ogni $A \in X, I \models A$).*

Definizione 5.3.4 (Validità) *Una proposizione A è* valida *se e solo se, per ogni dominio D e ogni interpretazione I su D, I è modello di A (per ogni D e I, $I \models A$).*

Definizione 5.3.5 (Soddisfacibilità di una proposizione) *Una proposizione A è soddisfacibile se e solo se esistono un dominio D e una interpretazione I su D tale che I è modello di A*[22]*.*

Definizione 5.3.6 (Soddisfacibilità) *Si dice che un insieme X di proposizioni è* soddisfacibile *se e solo se esistono un dominio D e un interpretazione I su D tale che, per ogni $A \in X, I \models A$.*

Definizione 5.3.7 (Conseguenza logica) *Si dice che la proposizione B è* conseguenza logica *della proposizione A, e si scrive $A \models B$, se e solo se per ogni D e per ogni I su D, se $I \models A$, allora $I \models B$.*

Definizione 5.3.8 (Equivalenza logica) *Si dice che le proposizioni A e B sono* logicamente equivalenti*, e si scrive $A \Longleftrightarrow B$, se e solo se $A \models B$ e $B \models A$.*

Definizione 5.3.9 (Conseguenza logica) *Si dice che la proposizione A è* conseguenza logica *dell'insieme di proposizioni X se e solo se, per ogni D e ogni I su D, se $I \models X$, allora $I \models A$.*

Si dimostrano agevolmente tutte le proprietà già incontrate nella logica proposizionale che riguardano i connettivi (infatti, le clausole induttive 2)-5) della definizione di $I \models A$ ricalcano quelle proposte nella prima parte). Ne ricordiamo alcune:

1. $\models A \Longrightarrow NonSod \neg A$
2. $A \models B \Longrightarrow \models A \rightarrow B$
3. $A \vee B \Longrightarrow \models A \cup B$
4. $\models A$ e $\models A \rightarrow B \Longrightarrow \models B$
5. $\models A \wedge B \Longrightarrow \models A$ e $\models B$
6. $X \models A \Longrightarrow NonSod X \cup \neg A$

Vale inoltre l'importante teorema di sostituzione: se in una proposizione A si sostituisce una sottoproposizione B con una logicamente equivalente, si ottiene una proposizione logicamente equivalente alla data. Vediamo ora alcuni esempi di proposizioni valide e alcune altre proprietà delle definizioni introdotte in questo capitolo.

[22] La definizione di validità di A richiede che per ogni dominio e ogni interpretazione I su quel dominio si abbia $I \models A$. Si può introdurre anche la nozione di validità in un dominio D: una proposizione è valida in un dominio D se e solo se, per ogni I su D, $I \models A$. Analogamente, si può introdurre la nozione di soddisfacibilità in un dominio D: una proposizione è soddisfacibile in un dominio D se e solo se esiste almeno una interpretazione I di dominio D tale che $I \models A$. Si può allora dire che una proposizione è valida se e solo se è valida in ogni dominio e che una proposizione è soddisfacibile se e solo se è soddisfacibile in almeno un dominio.

5.3.3 Alcune proposizioni valide

1) Consideriamo la proposizione $\forall x Px \to Pa$. Si vede immediatamente che essa è valida. Se sono dati un dominio D e una interpretazione I su D tali che $I \models \forall x Px$, per definizione, ogni b-reinterpretazione di I è modello di Pb. In particolare, la b-reinterpretazione che associa alla costante b l'individuo che I associa ad a (cioè I(a)), rende vera Pb, per cui $I(\mathrm{a}) \in I(P)$, e allora $I \models Pa$. Quindi, se $I \models \forall x Px$, allora $I \models Pa$, per cui $I \models \forall x Px \to Pa$. Essendo D e I qualsiasi, ne segue la validità di $\forall x Px \to Pa$.

In generale, se $A(x)$ è una *fbf* avente x come unica variabile libera, e a è una costante qualsiasi, con un ragionamento analogo si dimostra che:

$$\models \forall x A(x) \to A(a)$$

2) Consideriamo ora la proposizione $Pa \to \exists x Px$. Dimostriamo che anch'essa è valida. Siano dati un dominio D e una interpretazione I su D tali che $I \models Pa$ (quindi: $I(\mathrm{a}) \in I(P)$). Ne segue che $I \models \exists x Px$. Infatti, la b-reinterpretazione di I che associa a b l'elemento di D che I associa ad a (cioè I(a)), è modello di Pb (e ciò, per definizione, assicura che $I \models \exists x Px$). Quindi, se $I \models Pa$, allora $I \models \exists x Px$, per cui $I \models Pa \to \exists x Px$. Essendo D e I qualsiasi, ne segue che $Pa \to \exists x Px$ è valida. Generalizzando come nel caso precedente, si ottiene:

$$\models A(a) \to xA(x)$$

3) La definizione di $I \models \forall x A(x)$ e di $I \models \exists x A(x)$ è tale che, se $I \models \forall x A(x)$, allora $I \models \exists x A(x)$. Infatti, se tutte le a-reinterpretazioni di I rendono vera $A(a)$, almeno una a-reinterpretazione di I rende vera $A(a)$. Ciò consegue dal fatto che, per ipotesi, il dominio D non è vuoto (in un dominio vuoto tutte le proposizioni quantificate universalmente sono vere e tutte quelle quantificate esistenzialmente sono false). Quindi: $\models \forall x A \to \exists x A$[23]

5.3.4 Eliminabilità delle costanti individuali

Se A è una proposizione che contiene la costante individuale a, sia x una variabile che non compare in A e poniamo $A(x)$ la *fbf* aperta (con x come unica variabile libera) ottenuta sostituendo ovunque la costante a con la variabile x, segue dalla definizione, come si è peraltro già visto in precedenza, che:

$$I \models A \Longrightarrow I \models \exists x A(x)$$

D'altra parte, se $I \models \exists x A(x)$, dato che a non compare in $\exists x A(x)$ (per come è stata eseguita la sostituzione), per definizione, $I_a \models A(a)$ per almeno una a-reinterpretazione di I. Quindi:

$$\mathrm{Sod} A \Longleftrightarrow \mathrm{Sod} \exists x A(x)$$

Con analoghe considerazioni si dimostra che:

$$\models A \Longleftrightarrow \models \forall x A(x)$$

Quindi, *la soddisfacibilità e la validità di proposizioni contenenti costanti individuali si riconducono a quelle di proposizioni senza costanti* (basta sostituire le costanti con variabili diverse e che non occorrono in A e quantificarle esistenzialmente - se siamo interessati alla soddisfacibilità - o universalmente - se siamo interessati alla validità). Da quanto appena detto e da quanto visto in 5.3.3 segue, ad esempio:

$$\models \forall y(\forall x Px \to Py)$$

$$\models \forall y(Py \to \exists x Px)$$

[23] Nelle logiche inclusive (in cui il dominio può essere vuoto) tale proposizione non è valida.

5.3.5 Soddisfacibilità e validità delle *fbf* aperte

Consideriamo ora una *fbf* aperta A; supponiamo che contenga libera la sola variabile x. Come si è argomentato in precedenza, per una tale formula non ha senso chiedersi se è vera o falsa in base ad una interpretazione su un dominio. Ha tuttavia senso chiedersi se è soddisfacibile o se è valida[24]. Per definire tali concetti ci serviamo dell'analogia con quanto esposto nel punto precedente, trattando la variabile come fosse una costante. Più precisamente poniamo, per definizione:

$$\mathrm{Sod}A \Longleftrightarrow \mathrm{Sod}\exists x A(x)$$

$$\models A \Longleftrightarrow \models \forall x A(x)$$

Questa estensione dei concetti semantici di soddisfacibilità (e validità) alle *fbf* con una variabile libera si estende facilmente al caso in cui nella formula A vi siano più variabili libere: basta quantificare esistenzialmente (o universalmente) tutte le variabili libere occorrenti nella formula. Si ottiene una proposizione (una *fbf* chiusa) detta rispettivamente **chiusura esistenziale** (o **chiusura universale**) di A[25].
Ad esempio, se $A = Px \to \exists z(Rxz \wedge Sxy)$, la chiusura esistenziale di A è:

$$\exists x \exists y(Px \to \exists z(Rxz \wedge Sxy))$$

$$\forall x \forall y(Px \to \exists z(Rxz \wedge Sxy))$$

Si ha allora, per definizione, che A è *soddisfacibile se e solo se lo è la sua chiusura esistenziale* e che A è *valida se e solo se lo è la sua chiusura universale.*

Possiamo, ad esempio, dire che

$$\models \forall x Px \to Py$$

$$\models Py \to \exists x Px$$

poiché si è visto alla fine del punto precedente che le loro chiusure universali sono valide.

5.3.6 *Fbf* tautologiche

Consideriamo le due *fbf*:

a) $\forall x(Sab \to Px) \to (Sab \to \forall x Px)$

b) $(\forall x Px \to Sab) \to (\neg Sab \to \neg \forall x Px)$

Associamo ad esse le due seguenti fp della logica proposizionale:

a) $p \to (q \to r) \quad (p = \forall x(Sab \to Px);\ q = Sab;\ r = \forall x Px);$

b) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \quad (p = \forall x Px;\ q = Sab)$

---

[24] Se consideriamo ad esempio Px e, in un dominio di numeri naturali, abbiamo $I(P)$= essere pari, non ha senso chiedersi se Px è vera o falsa, in quanto traduce " ... è pari"; tuttavia ha senso chiedersi se è qualche volta vera (se almeno un individuo del dominio è pari) o se è sempre vera (se tutti gli elementi del dominio sono pari).

[25] Se in A vi sono più variabili libere, sono possibili più chiusure esistenziali o universali a seconda dell'ordine con cui si quantificano le variabili. Volendo si può stabilire un ordine con cui quantificare le variabili; tuttavia si dimostra facilmente che cambiando l'ordine di quantificazione (trattandosi di quantificazioni tutte esistenziali o tutte universali) si ottengono proposizioni tutte logicamente equivalenti fra loro.

Così una fp associata a $\forall x(Px \to Px)$ è p (mentre una forma proposizionale associata a $\forall xPx \to \forall xPx$ è $p \to p$).

Se la forma proposizionale associata ad A è una tautologia allora A è valida[26].

La b) precedente, ad esempio, ha come forma proposizionale associata la tautologia $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$. Presi un qualsiasi dominio D e una I su D, indipendentemente dal fatto se I è modello o no delle proposizioni $\forall xPx$ e Sab, essendo $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ una tautologia, $I \models (\forall xPx \to Sab) \to (\neg Sab \to \neg\forall xPx)$, e quindi la b) è valida.

In questo senso la logica dei predicati estende la logica proposizionale: presa una qualsiasi tautologia, se sostituiamo le lettere proposizionali con proposizioni del linguaggio della logica dei predicati (a lettere uguali proposizioni uguali) si ottengono proposizioni valide della logica dei predicati. Quindi, ad esempio, sono valide:

$\forall xPx \wedge \forall xQx \to \forall xPx$

$(Pa \to (\exists xQx \to Qa)) \to ((Pa \to \exists xQx) \to (Pa \to Qa))$

$\neg\exists yRyb \to (\exists yRyb \to \forall x\forall yRxy)$

$\forall xPx \to Rab \vee \forall xPx$

$\forall x\exists yRxy \to (Sbc \to \forall x\exists yRxy)$

$\neg\forall y\exists xSxya \to \neg\forall y\exists xSxya$

Si può inoltre osservare che questa circostanza si verifica anche per le *fbf* aperte la cui forma proposizionale associata è una tautologia. Consideriamo, ad esempio, $A = Rxy \to Rxy$, la cui forma proposizionale associata è $p \to p$. Per quanto visto nel punto precedente, per stabilire la validità di A dobbiamo considerare la chiusura universale di A, $\forall x\forall y(Rxy \to Rxy)$. Per definizione, dato un dominio D, una interpretazione I su D è modello di $\forall x\forall y(Rxy \to Rxy)$ se e solo se ogni a-reinterpretazione di I è modello di $\forall y(Ray \to Ray)$, e ciò accade se e solo se ogni b-reinterpretazione di questa a-reinterpretazione di I è modello di $Rab \to Rab$. Ma quest'ultima proposizione è valida (la forma proposizionale associata è una tautologia), cioè, per ogni D, ogni interpretazione è suo modello. Quindi $\forall x\forall y(Rxy \to Rxy)$ è valida e, per definizione, lo è anche $Rxy \to Rxy$. Il ragionamento eseguito in questo caso particolare ha una validità generale:

Se una fbf qualsiasi ha come forma proposizionale associata una tautologia allora essa è valida (e lo è anche la sua chiusura universale).

Sono quindi valide, ad esempio:

$Px \to Px$

$Ray \to Ray \vee \neg Qx$

$Rxy \to (Szx \to Rxy)$

$\neg(Px \wedge Qx) \leftrightarrow \neg Px \vee \neg Qx$

$(\forall xPx \to \neg Rya) \to (Rya \to \neg\forall xPx)$

$\forall xRxy \wedge \exists xRxz \to \exists xRxz$

[26]Evidentemente non vale il viceversa. Vi sono molte proposizioni valide la cui forma proposizionale non è una tautologia; ad esempio $\forall xPx \to \exists xPx$ è valida 5.3.3 e una forma proposizionale associata è $p \to q$ (che non è una tautologia), e lo stesso accade per $\forall xPx \to Pa$ e $Pa \to \exists xPx$. Le proposizioni $\forall y(\forall xPx \to Py)$ e $\forall y(Py \to \exists xPx)$ sono valide e una loro forma proposizionale è semplicemente p (che non è una tautologia).

5.3.7 Interdefinibilità dei quantificatori

Le due proposizioni $\forall x$ A(x) e $\neg x \neg$A(x) sono logicamente equivalenti. Infatti, se, dati D e I, $I \models \forall x$ A(x) ciò significa che, presa la costante a che non compare in $\forall x$A(x), ogni a-reinterpretazione di I è modello di A(a). Ma allora non vi è alcuna a-reinterpretazione di I che è modello di $\neg$A(a), per cui I non è modello di $\exists x \neg$ A(x) e, infine, $I \models \neg\exists x \neg$ A(x). Si vede immediatamente che vale anche il viceversa e quindi:

$$\boxed{\models \forall x A(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)}$$

In modo analogo si dimostra che:

$$\boxed{\models \exists x A(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)}$$

(e anche: $\models \neg\forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$; $\models \neg\exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$)

Queste equivalenze logiche mostrano che avremmo potuto introdurre nel linguaggio $\mathcal{L}$' uno solo dei due quantificatori e definire l'altro (come abbiamo visto a proposito dei connettivi). Se avessimo scelto $\forall$ avremmo potuto porre $\exists x A(x)$ come abbreviazione di $\neg\forall x \neg A(x)$ e, viceversa, se avessimo scelto $\exists$ avremmo potuto porre $\forall x A(x)$ come abbreviazione di $\neg\exists x \neg A(x)$.

5.3.8 Proposizioni simili

Le due proposizioni $\forall x Px$ e $\forall y Py$, come pure le due proposizioni $\exists x Px$ e $\exists y Py$, sono logicamente equivalenti. Infatti, dati un dominio D e una I su D, per tutte e quattro le proposizioni siamo ricondotti a considerare il comportamento delle a-reinterpretazioni rispetto alla proposizione Pa (e si può scegliere a per entrambe in ciascuna coppia). Quindi:

$I \models \forall x Px$ se e solo se $I \models \forall y Py$

$I \models \exists x Px$ se e solo se $I \models \exists y Py$

Anche questo risultato si può facilmente generalizzare. Intuitivamente si può dire che il nome di una variabile vincolata non è importante. Sono logicamente equivalenti:

$\forall x \exists y Rxy$, $\forall y \exists x Ryx$, $\forall y \exists z Ryz$, $\forall z \exists x Rzx$,

come pure:

$\forall x Px \rightarrow \exists x Qx$, $\forall y Py \rightarrow \exists z Qz$, $\forall z Pz \rightarrow \exists y Qy$,

e anche:

$\exists x(Px \rightarrow \forall x Qx)$, $\exists y(Py \rightarrow \forall z Qz)$, $\exists z(Pz \rightarrow \forall y Qy)$, e così via[27]. In generale, se $A(x)$ è una *fbf* avente x come variabile libera e $A(y)$ è la *fbf* che si ottiene sostituendo ogni occorrenza libera di x con y, si dice che $A(x)$ e $A(y)$ sono simili se e solo se $A(y)$ ha occorrenze libere di y esattamente negli stessi posti in cui x ha occorrenze libere in $A(x)$. Ebbene, si può dimostrare facilmente che:

se $A(x)$ $A(y)$ sono simili, allora:

$$\boxed{\models \forall x A(x) \leftrightarrow \forall y \neg A(y)}$$

$$\boxed{\models \exists x A(x) \leftrightarrow \exists y \neg A(y)}$$

Infatti, dall'ipotesi della similitudine di $A(x)$ e $A(y)$, segue che, per vedere se una interpretazione I è modello di $\forall x A(x)$, $\forall y A(y)$, $\exists x A(x)$, $\exists y A(y)$ si è ricondotti all'analisi delle a-reinterpretazioni di I rispetto alla stessa proposizione $A(a)$ (dove a è una costante che non occorre nelle proposizioni).

[27]E la cosa si potrebbe facilmente estendere anche al caso di *fbf* con variabili libere: ad esempio, $yRxy$ e $zRxz$ sono logicamente equivalenti.

Capitolo 6

Il Metodo dell'Albero Semantico

6.1 Introduzione

In questo capitolo estendiamo il metodo degli alberi semantici per trattare la validità, la soddisfacibilità e la conseguenza logica nell'ambito della logica dei predicati. Il metodo si applica a proposizioni (*fbf* chiuse) e si differenzia da quello introdotto nella prima parte per la presenza di quattro nuove regole relative alle proposizioni quantificate. L'idea di fondo rimane la stessa: per verificare se una data proposizione A è valida si cerca di costruire un controesempio, ossia di individuare un dominio e definire una interpretazione rispetto alla quale A risulta falsa, sviluppando, come nel caso proposizionale, un albero avente F[A] alla radice. Il procedimento risulta più articolato a causa della maggiore ricchezza del linguaggio $\mathcal{L}$' rispetto al linguaggio $\mathcal{L}$. Nel caso della logica proposizionale, per vedere se una data fp è o non è una tautologia, basta costruire la tavola di verità. Il metodo dell'albero è un procedimento alternativo rispetto alla costruzione dell'intera tavola di verità. Nel caso della logica dei predicati, invece, la definizione di validità di una proposizione A non i ndica un procedimento praticamente percorribile: si dovrebbe controllare che A è vera comunque scelto un insieme non vuoto come dominio D e comunque scelta una interpretazione I su D. Tuttavia, i possibili domini e le relative interpretazioni sono in numero infinito e non è possibile passarli in rassegna tutti. Ciò non vuol dire che non si possa in alcun modo stabilire se una proposizione è o non è valida: nella parte finale del capitolo precedente abbiamo dimostrato la validità di varie proposizioni (e di *fbf*) e di alcuni schemi di proposizioni, utilizzando però dei ragionamenti diversi a seconda delle circostanze. Il metodo dell'albero costituisce invece, come vedremo, un procedimento meccanico applicabile con generalità. Esso non presenta novità per quanto riguarda il trattamento delle proposizioni che hanno la forma di negazione, congiunzione, disgiunzione e condizionale; il ruolo delle lettere proposizionali viene ora svolto dalle proposizioni atomiche (Pa, Qb, Rab, Scd,...), nel senso che quando in un nodo compare una proposizione atomica ad esso non può essere applicata alcuna regola. È quindi sufficiente introdurre le nuove regole per trattare le proposizioni quantificate. Ed è qui che si registra una *differenza essenziale* con quanto accade nella logica proposizionale. In quest'ultima, quando si esamina un nodo contenente una fp segnata applicando la relativa regola, il nodo viene contrassegnato e non è più necessario prenderlo di nuovo in considerazione. Poiché i nodi conseguenza contengono fp più semplici, durante il procedimento si devono esaminare fp segnate via via più brevi e si finisce per pervenire a nodi contenenti solo lettere proposizionali. Ebbene, nel caso della logica dei predicati, *vi sono nodi che non vengono contrassegnati*, ossia che vanno sempre tenuti presenti, anche se sono già stati esaminati. In altre parole, può succedere che si innesti un meccanismo in base al quale certi nodi devono essere periodicamente riesaminati e, quindi, che il procedimento non abbia termine, ossia che l'albero si sviluppi all'infinito. Come vedremo, data una proposizione A, se A è *valida*, allora l'albero semantico per F[A] si chiude (come nel caso proposizionale) e quindi ha uno sviluppo che richiede un numero finito di passi. Tuttavia, se A non è valida, allora l'albero non si chiude, e si hanno due casi: a) ad un certo stadio l'albero è terminato, ossia nessuna regola

produce nuovi nodi, oppure b) l'albero va avanti all'infinito. D'altra parte, anche se in molti casi è facile rendersi conto che si realizza il caso b), ossia che lo sviluppo dell'albero non avrà mai termine, non è possibile riconoscerlo in generale. In altri termini, se stiamo sviluppando un albero per F[A] e, a un certo stadio, l'albero non è né chiuso, né terminato, non possiamo decidere se, continuando lo sviluppo, l'albero si chiuderà, o terminerà ad uno stadio successivo, o se andrà avanti all'infinito, e, quindi, non possiamo decidere se A è o non è valida. Questo inconveniente, comunque, non è imputabile al metodo dell'albero semantico, ma è una limitazione di qualsiasi procedimento meccanico per sottoporre a verifica la validità delle proposizioni della logica dei predicati. Un importante teorema di Church del 1936 dimostra che non esiste alcun procedimento meccanico che consente di stabilire in un numero finito di passi se una proposizione della logica dei predicati del primo ordine è o non è valida: *la logica dei predicati del primo ordine è indecidibile*[1].
Il metodo dell'albero semantico si basa sulla ricerca del controesempio. Si suppone che A possa essere falsa (si pone alla radice F[A]) e, se l'albero si chiude, si può concludere che tale ricerca non può avere esito e, quindi, che la proposizione è valida. Se l'albero non si chiude si costruisce, come avviene nel caso proposizionale, un controesempio che illustra come la nostra proposizione A possa risultare falsa. Un controesempio nella logica dei predicati deve essere costituito da un dominio D e da una interpretazione I su D (rispetto ai quali, appunto, A sia falsa). Ebbene, l'idea di fondo è quella di utilizzare le costanti del linguaggio $\mathcal{L}$' per costruire D: il dominio D è formato utilizzando le costanti e l'interpretazione che associa a ciascuna costante (intesa come elemento del linguaggio) la costante stessa (intesa come elemento del dominio). Ci si viene allora a trovare nella fortunata circostanza nella quale ogni elemento del dominio è coinvolto dalla interpretazione e ciò rende più semplice la trattazione delle proposizioni quantificate universalmente e esistenzialmente[2].

6.2 Il metodo dell'albero semantico

Per presentare il metodo dell'albero semantico per la logica dei predicati del primo ordine, dato che continuiamo ad accettare le regole per le negazioni, congiunzioni, disgiunzioni e condizionali basta introdurre le regole per trattare i nodi che contengono proposizioni quantificate.

Regole per il quantificatore universale

(a) Regola per V[$\forall x A(x)$]

Se si esamina un nodo del tipo V[$\forall x A(x)$], si prolungano i rami aperti che lo contengono con i nodi V[$A(a)$] per tutte le costanti a che figurano in ciascun ramo (e che sono sempre in numero finito):

$$\begin{array}{c} \mathrm{V}[\forall x A(x)] \\ | \\ \mathrm{V}[A(a)] \end{array} \quad \text{per tutte le costanti } a \text{ che figurano nel ramo}$$

Il nodo non viene contrassegnato.

La giustificazione intuitiva di questa regola è la seguente. Se è vera una proposizione quantificata universalmente, devono essere veri tutti i suoi casi particolari, ossia quelli che si ottengono

[1] Più in dettaglio: il procedimento dell'albero semantico e altri analoghi danno una risposta in un numero finito di passi se la proposizione A è valida, ma possono non dare risposta se A non è valida. Il teorema di Church dimostra proprio che non può esistere un procedimento meccanico che dia una risposta in un numero finito di passi quando A non è valida: se esistesse, applicando simultaneamente ad A sia tale procedimento, sia quello dell'albero semantico, dato che A è valida o non lo è, prima o poi, comunque in un numero finito di passi, uno dei due procedimenti giungerebbe al termine e allora potremmo decidere se A è o non è valida. In altri termini, abbiamo un test che funziona se la proposizione è valida, ma non abbiamo - e per il teorema di Church non possiamo avere - il test che funziona se la proposizione non è valida. Si dice anche che *la logica dei predicati è semidecidibile*, per sottolineare che abbiamo un test meccanico che funziona per metà, ossia nel caso in cui A è valida.

[2] Se il dominio è fatto di costanti e ogni costante è interpretata su se stessa, una proposizione del tipo $\forall x A(x)$ è vera in I se e solo se, per ogni a in D, $A(a)$ è vera in I, e una proposizione del tipo $\exists x A(x)$ è vera in I se e solo se esiste almeno una costante a in D tale che $A(a)$ è vera in I

quando la variabile è sostituita da una costante. Si capisce anche perché il nodo non va contrassegnato. Se nel ramo vengono introdotte in seguito nuove costanti, se è vero che per ogni x vale $A(x)$, $A(x)$ dovrà valere anche rispetto a queste nuove costanti. Si può quindi verificare il caso in cui il nodo debba essere riesaminato. Questa regola richiede una clausola aggiuntiva:

Clausola: qualora nel ramo non figuri alcuna costante, allora si introduce il nodo V$[A(a)]$, dove a è una costante qualsiasi[3].

(b) Regola per F$[\forall x A(x)]$

Se si esamina un nodo del tipo F$[\forall x A(x)]$, si prolunga ogni ramo che lo contiene con il nodo F$[A(a)]$, dove a è una costante che non figura nel ramo:

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[\forall x A(x)]^* \\ | \\ \mathrm{F}[A(a)] \end{array} \quad \text{dove } a \text{ è una costante che non figura nel ramo}$$

Il nodo viene contrassegnato.

La giustificazione intuitiva è la seguente. Se la proposizione universalmente quantificata $\forall x A(x)$ è falsa, vi deve essere almeno un individuo del dominio per cui non vale la proprietà $A(x)$; poiché il dominio è costituito dalle costanti, si introduce una costante relativamente alla quale si impone che la proprietà $A(x)$ sia falsa. Come si vedrà negli esempi, la richiesta che la costante sia nuova nel ramo è dovuta al fatto che, rispetto alle costanti già presenti in esso, il ramo fornisce informazioni che possono essere incompatibili con il non possedere la proprietà $A(x)$. La presenza del nodo F$[A(a)]$ assicura che il nodo F$[\forall x A(x)]$ sia soddisfatto indipendentemente dai successivi sviluppi del ramo e, quindi, che esso si possa contrassegnare (non è più necessario riesaminarlo). Osserviamo inoltre che l'esame di un nodo di questo tipo comporta la comparsa nel ramo di una nuova costante e, quindi, si capisce come sia eventualmente necessario riesaminare i nodi del tipo V$[\forall x A(x)]$ per soddisfarli con le nuove costanti che può capitare di aver dovuto introdurre con questa regola.

Regole per il quantificatore esistenziale

Le regole per il quantificatore esistenziale si possono ricondurre, per quanto visto al punto 5.3.7 del Cap. V, a quelle del quantificatore universale. Infatti V$[\exists x A(x)]$ equivale a V$[\forall x \neg A(x)]$, e quindi a F$[\forall x \neg A(x)]$, mentre F$[\exists x A(x)]$ equivale a F$[\neg \forall x \neg a(x)]$, e quindi a V$[\forall x \neg A(x)]$. Comunque preferiamo formularle esplicitamente per poterle applicare direttamente negli esempi.

(c) Regola per V$[\exists x A(x)]$

Se si esamina un nodo del tipo V$[\exists x A(x)]$, si prolunga ogni ramo aperto passante per esso con il nodo V$[A(a)]$, con a costante che non figura nel ramo e *il nodo si contrassegna:*

$$\begin{array}{c} \mathrm{V}[\exists x A(x)]^* \\ | \\ \mathrm{V}[A(a)] \end{array} \quad \text{dove } a \text{ è una costante che non figura nel ramo}$$

(d) Regola per F$[\exists x A(x)]$

Se si esamina un nodo del tipo F$[\exists x A(x)]$, si prolunga ogni ramo aperto passante per esso con i nodi F$[A(a)]$ per tutte le costanti a che occorrono in ciascun ramo:

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[\exists x A(x)] \\ | \\ \mathrm{F}[A(a)] \end{array} \quad \text{per tutte le costanti } a \text{ che figurano nel ramo}$$

[3] Tale clausola ha una importante funzione: essa corrisponde alla nostra scelta in base alla quale il dominio D non è mai vuoto. Se si sopprime tale clausola si ha una logica inclusiva. Vedremo tra breve esempi in cui essa interviene. Cogliamo l'occasione per segnalare che il rifiuto del dominio vuoto deriva dalla scelta secondo la quale le costanti denotano sempre individui del dominio (se il dominio è vuoto, evidentemente le costanti sono non denotanti). La possibilità della non denotazione ha importanti risvolti filosofici e tecnici, ed è trattata in appositi settori della logica (logiche inclusive, logiche libere, ecc.). Un inconveniente non trascurabile dell'assumere la possibilità del dominio vuoto è il seguente: le proposizioni $Pa \to Pa$ e $(Pa \to Pa) \to \exists x(Px \to Px)$ sono valide in ogni dominio, mentre la proposizione ottenuta per modus ponens, $\exists x(Px \to Px)$ è falsa (come tutte le proposizioni esistenziali) nel dominio vuoto; quindi, se si ammette il dominio vuoto, persino la regola del modus ponens (o la regola di eliminazione di $\to$ non risulta corretta e va modificata.

Il nodo non si contrassegna.

Clausola: qualora nel ramo non figura alcuna costante, allora si introduce il nodo F$[A(a)]$, dove a è una costante qualsiasi.

Infatti, per soddisfare V$[\exists x A(x)]$, vi deve essere un individuo che ha la proprietà $A(x)$, e bisogna prenderlo nuovo, poiché le costanti già presenti nel ramo potrebbero non poter avere, pena una indesiderata contraddizione, la proprietà in questione. F$[\exists x A(x)]$ è soddisfatto se nessun individuo ha la proprietà $A(x)$, e quindi va riesaminato se nel ramo si introducono nuove costanti (che corrispondono a nuovi individui del dominio). La clausola corrisponde all'ipotesi che il dominio non è vuoto, e quindi che contiene almeno una costante.

La regola (a) corrisponde alla regola (d), si applica con le costanti già presenti (o con una introdotta d'ufficio per la clausola) e il nodo non si contrassegna. Chiamiamo le due regole (a) e (d) **regole del III tipo**.

La regola (b) corrisponde alla regola (c), si applica introducendo una nuova costante e il nodo si contrassegna.

Chiamiamo le due regole (b) e (c) **regole del IV tipo**.

Prima di passare agli esempi osserviamo che, come nel caso proposizionale è più conveniente applicare le regole del I tipo prima di quelle del II tipo (ossia si rivela più efficiente rimandare il più possibile le biforcazioni), così è più conveniente applicare, qualora possibile, prima le regole del IV tipo e poi quelle del III tipo. Infatti è l'applicazione delle regole del IV tipo che comporta l'introduzione di nuove costanti con le quali, in ogni caso, vanno soddisfatti nodi che richiedono l'applicazione di una regola del III tipo. In genere, quindi, applichiamo, qualora possibile, prima le regole del I e IV tipo, poi quelle del III e infine quelle del II tipo (ossia rimandiamo il più possibile le biforcazioni).

Esempio 6.2.1 Verificare che: $\models \forall x Px \to Pa$.

L'albero risulta:

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[\forall x Px \to Pa]^* \\ | \\ \mathrm{V}[\forall x Px] \\ | \\ \mathrm{F}[Pa] \\ | \\ \mathrm{V}[Pa] \\ ==== \end{array}$$

Inizialmente si è applicata la regola per F$[A \to B]$. Il nodo V$[\forall x Px]$ richiede una regola del III tipo: si toglie il $\forall x$ e, nella *fbf* risultante Px, si sostituisce la variabile libera x con una costante già presente nel ramo, in questo caso a, e si ottiene V$[Pa]$. L'albero si chiude e la formula è valida. Con il metodo dell'albero si verifica anche la generalizzazione della proposizione precedente:

$$\models \forall x A(x) \to A(a)$$

Si ottiene un meta-albero:

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[\forall x A(x) \to A(a)]^* \\ | \\ \mathrm{V}[\forall x A(x)] \\ | \\ \mathrm{F}[A(a)] \\ | \\ \mathrm{V}[A(a)] \\ ==== \end{array}$$

In modo analogo si vede che: $\models Pa \to \exists x Px$
e, generalizzando: $\models A(a) \to \exists x A(x)$. $\oplus$

Esempio 6.2.2 Verificare che $\models \forall x Px \to \exists x Px$

Inizialmente si ha:

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[\forall x Px \to \exists x Px]^* \\ | \\ \mathrm{V}[\forall x Px] \\ | \\ \mathrm{F}[\exists x Px] \end{array}$$

A questo punto si hanno da esaminare due nodi ai quali va applicata una regola del III tipo (talvolta diremo anche, più brevemente, nodi del III tipo). Nel ramo non compare alcuna costante, per cui va applicata la clausola e si introduce d'ufficio una costante a: da $\mathrm{V}[\forall x Px]$ segue allora $\mathrm{V}[Pa]$. Il nodo $\mathrm{F}[\exists x Px]$ può ora essere soddisfatto con a e si ottiene $\mathrm{F}[Pa]$ e l'albero si chiude:

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[\forall x Px \to \exists x Px]^* \\ | \\ \mathrm{V}[\forall x Px] \\ | \\ \mathrm{F}[\exists x Px] \\ | \\ \mathrm{V}[Pa] \\ | \\ \mathrm{F}[Pa] \\ ==== \end{array}$$

Abbiamo così visto che l'impiego della clausola alle regole del III tipo è necessario per giustificare la validità della proposizione che caratterizza la nostra scelta del dominio non vuoto (nel dominio vuoto tale proposizione non è vera). $\oplus$

Esempio 6.2.3 Vediamo, con il metodo dell'albero semantico, la validità delle formule che garantiscono l'interdefinibilità dei quantificatori:

$$\models \forall x A(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x) \qquad\qquad \models \exists x A(x) \leftrightarrow \neg\forall x \neg A(x)$$

Gli alberi sono[4]:

[4] Lo studente dovrebbe seguire attentamente i passaggi nei due alberi: dopo l'applicazione della regola del $\leftrightarrow$, si applicata la regola del I tipo relativa alla negazione. In tutti e quattro i rami (dei due alberi) vi sono da esaminare due nodi, uno con regola del III tipo e l'altro con regola del IV tipo. Abbiamo sempre esaminato prima quest'ultimo, lo abbiamo soddisfatto con la costante a (supposta nuova nel ramo) e lo abbiamo contrassegnato. Se si è ottenuta una negazione la abbiamo soddisfatta subito e poi siamo passati al nodo del III tipo, altrimenti prima si è esaminato il nodo del III tipo e ne è risultata una negazione. In tutti i casi il ramo si è chiuso.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathrm{F}[\forall x A(x) \leftrightarrow \neg\exists x \neg A(x)]^* & \\
\mathrm{V}[\forall x A(x)] & & \mathrm{F}[\forall x A(x)]^* \\
\mathrm{F}[\neg\exists x \neg A(x)]^* & & \mathrm{V}[\neg\exists x \neg A(x)]^* \\
\mathrm{V}[\exists x \neg A(x)]^* & & \mathrm{F}[\exists x \neg A(x)] \\
\mathrm{V}[\neg A(a)]^* & & \mathrm{F}[A(a)] \\
\mathrm{F}[A(a)] & & \mathrm{F}[\neg A(a)]^* \\
\mathrm{V}[A(a)] & & \mathrm{V}[A(a)] \\
==== & & ====
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \mathrm{F}[\exists x A(x) \leftrightarrow \neg\forall x \neg A(x)]^* & \\
\mathrm{V}[\exists x A(x)]^* & & \mathrm{F}[\exists x A(x)] \\
\mathrm{F}[\neg\forall x \neg A(x)]^* & & \mathrm{V}[\neg\forall x \neg A(x)]^* \\
\mathrm{V}[\forall x \neg A(x)] & & \mathrm{F}[\forall x \neg A(x)]^* \\
\mathrm{V}[A(a)] & & \mathrm{F}[\neg A(a)]^* \\
\mathrm{V}[\neg A(a)]^* & & \mathrm{V}[A(a)] \\
\mathrm{F}[A(a)] & & \mathrm{F}[A(a)] \\
==== & & ====
\end{array}
$$

Dato che gli alberi si chiudono le proposizioni sono valide. $\oplus$

Il metodo dell'albero semantico può essere applicato, come abbiamo visto nel Cap. 3, oltre che per verificare se una proposizione è valida, per vedere se due proposizioni sono logicamente equivalenti, se sussiste il nesso di conseguenza logica tra un insieme X (finito) e una proposizione A, se un insieme (finito) X è soddisfacibile.

Esempio 6.2.4 Verificare se:

$$\{\forall x(Rxa \to Rba), \neg Rba\} \models \forall x \neg Rxa$$

L'albero risulta (si ricordi che si inizia l'albero ponendo vere le premesse e falsa la conclusione):

$$
\begin{array}{ccc}
 & \mathrm{V}[\forall x(Rxa \to Rba)] & \\
 & \mathrm{V}[\neg Rba]^* & \\
 & \mathrm{F}[\forall x \neg Rxa]^* & \\
 & \mathrm{F}[Rba] & \\
 & \mathrm{F}[\neg Rca]^* & \\
 & \mathrm{V}[Rca] & \\
 & \mathrm{V}[Raa \to Rba] & \\
 & \mathrm{V}[Rba \to Rba] & \\
 & \mathrm{V}[Rca \to Rba]^* & \\
\mathrm{F}[Rca] & & \mathrm{V}[Rba] \\
==== & & ====
\end{array}
$$

Spiegazione. Scritti i tre nodi iniziali, esaminiamo prima V[$\neg Rba$] che è una negazione, poi F[$\forall x \neg Rxa$] (che richiede una regola del IV tipo, ossia, più brevemente, un nodo del IV tipo), che si soddisfa con una costante c nuova nel ramo; si ottiene F[$\neg Rca$] che esaminiamo subito. A questo punto rimane ancora da esaminare il nodo alla radice, il quale richiede una regola del III tipo, e quindi si soddisfa con le costanti presenti nel ramo (cioè a, b e c) e si ottengono V[$Raa \to Rba$], V[$Rba \to Rba$], V[$Rca \to Rba$]. Se si esamina prima quest'ultimo nodo l'albero si chiude. Il chiudersi dell'albero, come nel caso proposizionale, significa che non si può realizzare quanto posto all'inizio, ossia le premesse vere e la conclusione falsa, e quindi che sussiste il nesso di conseguenza logica. $\oplus$

Esempio 6.2.5 Verificare se:

$$\exists x Px \to \forall y Rya \models \neg \exists x \neg Rxa.$$

Procediamo come nell'esempio precedente:

$$\begin{array}{c}
\mathrm{V}[\exists x Px \to \forall y Rya]^* \\
| \\
\mathrm{F}[\neg \exists x \neg Rxa]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\exists x \neg Rxa]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\neg Rba]^* \\
| \\
\mathrm{F}[Rba] \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\mathrm{F}[\exists x Px] & \mathrm{V}[\forall y Rya] \\
| & | \\
\mathrm{F}[Pa] & \mathrm{V}[Raa] \\
| & | \\
\mathrm{F}[Pb] & \mathrm{V}[Rba] \\
 & ====
\end{array}
\end{array}$$

Spiegazione. Scritti i due primi nodi V[$\exists x Px \to \exists y Rya$], F[$\neg \exists x \neg Rxa$] esaminiamo prima il secondo (che è una negazione), il quale ha come conseguenza un nodo che richiede una regola del IV tipo, che esaminiamo subito, introducendo la nuova costante b: si ricava V[$\neg Rba$] che si esamina subito. A questo punto ritorniamo al nodo iniziale che dà luogo alla biforcazione. In entrambi i rami figura un nodo che richiede una regola del III tipo e che si soddisfa con le costanti presenti, cioè a e b. A questo punto il ramo a destra si chiude (essendovi F[Rba] e V[Rba]), mentre il ramo a sinistra rimane aperto. In questo ramo l'unico nodo non contrassegnato (a parte quelli che contengono proposizioni atomiche) è F[$\exists x Px$] (che è di quelli che non si contrassegnano); tuttavia, dato che questo nodo è già stato soddisfatto con tutte le costanti presenti nel ramo, anche riesaminandolo non si aggiunge alcun nuovo nodo e, quindi, l'albero è terminato. Questa volta l'albero non si è chiuso, in quanto un ramo è rimasto aperto. Come abbiamo già anticipato, ciò significa che il nesso di conseguenza logica non sussiste. Il ramo aperto, inoltre, indica una situazione in cui la premessa è vera e la conseguenza falsa. Consideriamo il dominio D costituito dalle costanti che figurano nel ramo, ossia D = {a,b}. Come si è detto, si interpreta la costante a in a, e b in b. Poiché nel ramo figura F[Rba] interpretiamo R in modo che la coppia (b,a) non stia in I(R). In questo modo Rba è falsa, $\neg Rba$ vera, $\exists x \neg Rxa$ vera e $\neg \exists x \neg Rxa$ falsa. Poiché nel ramo compaiono F[Pa] e F[Pb] interpretiamo P in modo che né a né b stiano in I(P) (e, in questo caso, ciò significa che I(P) = $\emptyset$). Poiché nessun elemento di D ha I(P), in tale interpretazione

$\exists x Px$ è falsa e, quindi, $\exists x Px \to \forall y Rya$ vera (essendo un condizionale con antecedente falso). Si è così trovato un esempio in cui la premessa ($\exists x Px \to \forall y Rya$) è vera e il conseguente ($\neg\exists x\neg Rxa$) falso, per cui non sussiste il nesso di conseguenza logica. $\oplus$

Esempio 6.2.6 Verificare se Sod $\{\forall x Px, \forall x \neg Px\}$.

L'albero risulta (si ricordi che, trattandosi di una questione di soddisfacibilità, si pongono vere tutte le proposizioni dell'insieme):

$$\begin{array}{c} \mathrm{V}[\forall x Px] \\ | \\ \mathrm{V}[\forall x \neg Px] \\ | \\ \mathrm{V}[Pa] \\ | \\ \mathrm{V}[\neg Pa]^* \\ | \\ \mathrm{F}[Pa] \\ ==== \end{array}$$

Spiegazione. Entrambi i nodi iniziali richiedono una regola del III tipo, per cui esaminiamo il primo. Dato che nel ramo non vi sono costanti, si applica la clausola e se ne introduce una d'ufficio, ad esempio a, e si ottiene V[Pa]. Il secondo nodo può ora essere soddisfatto con tale costante, e si ottiene V[$\neg Pa$] dalla quale segue F[Pa] e si chiude il ramo. Ciò significa che le proposizioni dell'insieme non possono essere simultaneamente vere e, quindi, che l'insieme è insoddisfacibile. Si osservi anche che questo risultato dipende dall'aver escluso il dominio vuoto. Nel dominio vuoto, infatti, le due proposizioni quantificate universalmente sono entrambe vere. L'esclusione del dominio vuoto è ottenuta, come si è già detto, con l'inserimento della clausola nelle regole del III tipo, clausola che si è appunto applicata in questo esempio. $\oplus$

Esempio 6.2.7 Verificare se Sod $\{\exists x Px, \exists x \neg Px\}$.

Procedendo come nell'Esempio precedente si ha il seguente albero:

$$\begin{array}{c} \mathrm{V}[\exists x Px]^* \\ | \\ \mathrm{V}[\exists x \neg Px]^* \\ | \\ \mathrm{V}[Pa] \\ | \\ \mathrm{V}[\neg Pb]^* \\ | \\ \mathrm{F}[Pb] \end{array}$$

Spiegazione. I nodi iniziali richiedono una regola del IV tipo. Dal primo, che si contrassegna, segue V[Pa], mentre dal secondo, che va anch'esso contrassegnato, segue V[$\neg Pb$], da cui F[Pb]. A questo punto tutti i nodi sono contrassegnati e l'albero è rimasto aperto; le proposizioni dell'insieme dato possono essere simultaneamente vere, e quindi l'insieme è soddisfacibile. Come nell'Esempio 6.2.5 il ramo indica una situazione che rende vere le proposizioni. Si pone D={a,b} (ossia l'insieme delle costanti che compaiono nel ramo). Poiché nel ramo vi sono V[Pa] e F[Pb] poniamo $I(P)$={a}, ossia che I(P) è vera di a e non è vera di b. Nel dominio D con questa interpretazione sono vere sia $\exists x Px$ (in quanto vera Pa), sia $\exists x \neg Px$ (in quanto vera $\neg Pb$).

Cogliamo l'occasione per sottolineare un aspetto importante. Nell'albero precedente, quando abbiamo esaminato V[$\exists x \neg Px$] lo abbiamo soddisfatto con la costante b (in quanto a era già presente nel ramo). Se avessimo usato di nuovo la costante a avremmo chiuso l'albero:

$$\begin{array}{c} \mathrm{V}[\exists x Px]^* \\ | \\ \mathrm{V}[\exists x \neg Px]^* \\ | \\ \mathrm{V}[Pa] \\ | \\ \mathrm{V}[\neg Pa]^* \\ | \\ \mathrm{F}[Pa] \\ ==== \end{array}$$

Avremmo quindi dichiarato insoddisfacibile un insieme che, come si è visto, è soddisfacibile. Questo esempio illustra con particolare chiarezza come mai, quando si applica una regola del IV tipo, va introdotta una nuova costante: il nodo V[$\exists x \neg Px$] è soddisfatto quando vi è un individuo che non ha $I(P)$, e dell'individuo denotato da a nel ramo si è già richiesto che goda di $I(P)$. Quindi, se si riadopera a, si ottiene una contraddizione, che tuttavia non è insita nelle due premesse (come emerge dallo sviluppo corretto del metodo dell'albero). $\oplus$

6.3 Rapporti fra connettivi e quantificatori

Vediamo ora, sfruttando il metodo dell'albero semantico, alcune proposizioni che trattano i rapporti fra i connettivi e i quantificatori.

Esempio 6.3.1 Verificare che $\models \forall x(Px \lor Qa) \to \forall x Px \lor Qa$

$$\begin{array}{c} \mathrm{F}[\forall x(Px \lor Qa) \to \forall x Px \lor Qa]^*(1) \\ | \\ \mathrm{V}[\forall x(Px \lor Qa)](2) \\ | \\ \mathrm{F}[\forall x Px \lor Qa]^*(3) \\ | \\ \mathrm{F}[\forall x Px]^*(4) \\ | \\ \mathrm{F}[Qa](5) \\ | \\ \mathrm{F}[Pb](6) \\ | \\ \mathrm{V}[Pb \lor Qa]^*(7) \\ | \\ \mathrm{V}[Pa \lor Qa](8) \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \begin{array}{cc} \mathrm{V}[Pb]\ (9) & \mathrm{V}[Qa]\ (10) \\ ==== & ==== \end{array} \end{array}$$

Spiegazione. Dalla (1) seguono la (2) e la (3) per la regola di F$[A \to B]$ (la proposizione data è un condizionale). La (2) richiede una regola del III tipo, per cui rimandiamo il suo esame, e applichiamo alla (3) la regola di F$[A \vee B]$, ottenendo la (4) e la (5). La (5) contiene una proposizione atomica e ad essa non si può applicare alcuna regola. Fra la (2) e la (4), scegliamo quest'ultima che richiede una regola di IV tipo: si ottiene la (6) eliminando il quantificatore $\forall x$ e sostituendo in Px al posto di x la nuova costante b (e la (4) si contrassegna). Passiamo ora alla (2) che soddisfiamo con le costanti già presenti nel ramo, ossia b (e si ha la (7)) e a (e si ha la (8)). Dalla (7) si ottengono, con biforcazione, la (9) e la (10) e entrambi i rami si chiudono. Dato che l'albero si chiude la proposizione è valida. Questo risultato si può generalizzare nel modo seguente:

$$\models \forall x(A(x) \vee B) \to \forall x A(x) \vee B (\text{se x non figura libera in B}).$$

Esempio 6.3.2 É valido il condizionale inverso di quello visto nell'Esempio 6.3.1:

$$\models \forall x Px \vee Qa \to \forall x(Px \vee Qa)$$

Infatti:

F$[\forall x Px \vee Qa \to \forall x(Px \vee Qa)]$*

V$[\forall x Px \vee Qa]$*

F$[\forall x(Px \vee Qa)]$*

F$[Pb \vee Qa]$*

F$[Pb]$

F$[Qa]$

V$[\forall x Px]$	V$[Qa]$
V$[Pb]$	====
====	

Si osservi che abbiamo esaminato il nodo V$[\forall x Px \vee Qa]$ il più tardi possibile. Nell'esame di F$[\forall x(Px \vee Qa)]$ abbiamo introdotto la nuova costante b. Il nodo V$[\forall x Px]$ non si contrassegna e si soddisfa con le costanti già presenti nel ramo (avremmo dovuto anche soddisfarlo con a, cioè farlo seguire da V$[Pa]$, ma non è stato necessario perché soddisfacendolo con b il ramo si è chiuso). Anche in questo caso si ottiene facilmente la seguente generalizzazione:

$$\models \forall x A(x) \vee B \to \forall x(A(x) \vee B) (\text{se x non libera in B}).$$

e l'ulteriore generalizzazione in cui la *fbf* è aperta.

Esempio 6.3.3 Verificare se:

a) $\models \forall x Px \vee \forall x Qx \to \forall x(Px \vee Qx)$

b) $\models \forall x(Px \vee Qx) \to \forall x Px \vee \forall x Qx$

a) Si ha:

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}[\forall xPx \vee \forall xQx \rightarrow \forall x(Px \vee Qx))]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\forall xPx \vee \forall xQx]^* \\
| \\
\mathrm{F}[\forall x(Px \vee Qx)]^* \\
| \\
\mathrm{F}[Pa \vee Qa]^* \\
| \\
\mathrm{F}[Pa] \\
| \\
\mathrm{F}[Qa] \\
\begin{array}{cc}
\mathrm{V}[\forall xPx] & \mathrm{V}[\forall xQx] \\
| & | \\
\mathrm{V}[Pa] & \mathrm{V}[Qa] \\
==== & ====
\end{array}
\end{array}$$

L'albero si chiude, quindi la proposizione è valida. Il risultato si generalizza facilmente (con un meta-albero simile al precedente) e si ottiene:

$$\models \forall xA(x) \vee \forall xB(x) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

b) Si ha:

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}[\forall x(Px \vee Qx) \rightarrow \forall xPx \vee \forall xQx]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\forall x(Px \vee Qx)]^* \\
| \\
\mathrm{F}[\forall xPx \vee \forall xQx)]^* \\
| \\
\mathrm{F}[\forall xPx]^* \\
| \\
\mathrm{F}[\forall xQx]^* \\
| \\
\mathrm{F}[Pa] \\
| \\
\mathrm{F}[Qb] \\
| \\
\mathrm{V}[Pa \vee Qa]^* \\
| \\
\mathrm{V}[Pb \vee Qb]^* \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \mathrm{V}[Pa] \\ ==== \end{array} &
\begin{array}{c}
\mathrm{V}[Qa] \\
\begin{array}{cc}
\mathrm{V}[Pb] & \mathrm{V}[Qb] \\
 & ====
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Un ramo è rimasto aperto, per cui la proposizione non è valida. Le formule presenti nel ramo aperto indicano, come già illustrato in precedenza, la situazione in cui la proposizione non è vera. Si pone $D = \{$ a,b $\}$, I(P) = b (poiché nel ramo vi è V[Pb] e F[Pa]), I(Q) = a (poiché nel ramo vi è V[Qa] e F[Qb]). Si riconosce allora che sono soddisfatte tutte le proposizioni segnate presenti nel ramo; in particolare è vera $\forall x(Px \vee Qx)$ (in quanto ogni elemento di D ha I(P) o I(Q): a ha I(Q) e b ha I(P)), mentre sono false $\forall xPx$ e $\forall xQx$ (non tutti gli elementi di D hanno I(P), o I(Q)), per cui la proposizione iniziale è falsa.

Ne segue che, mentre $\forall xA(x) \vee B$ e $\forall x(A(x) \vee B)$ sono logicamente equivalenti (Esempio 6.3.1), non lo sono $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ e $\forall x(A(x) \vee B(x))$ (la seconda è conseguenza logica della prima, ma non viceversa)[5]. $\oplus$

Abbiamo quindi esaminato in dettaglio il rapporto fra il quantificatore universale e la disgiunzione. Si può compiere un'indagine sistematica dei rapporti fra i quantificatori e i connettivi logici. Vediamo ancora alcuni esempi.

Esempio 6.3.4 Verificare che

$$\models \exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

e che l'inversa non è valida.

Il meta-albero risulta:

$$\begin{array}{c}
\mathrm{F}[\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\exists x(A(x) \wedge B(x))]^* \\
| \\
\mathrm{F}[\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)]^* \\
| \\
\mathrm{V}[A(a) \wedge B(a)]^* \\
| \\
\mathrm{V}[A(a)] \\
| \\
\mathrm{V}[B(a)] \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\mathrm{F}[\exists xA(x)] & \mathrm{F}[\exists xB(x)] \\
| & | \\
\mathrm{F}[A(a)] & \mathrm{F}[B(a)] \\
==== & ====
\end{array}
\end{array}$$

L'albero si chiude e lo schema è valido. Consideriamo ora un caso particolare del condizionale inverso e cioè $\exists xPx \wedge \exists xQx \to \exists x(Px \wedge Qx)$ e sviluppiamo l'albero:

[5] Si dimostri che la proposizione $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ è logicamente equivalente alla proposizione $\forall x\forall y(A(x) \vee B(y))$ con x diverso da y (ossia se si sostituiscono le occorrenze libere di x in $B(x)$ con y e poi si quantificano universalmente entrambe le variabili). Qualora si considerassero *fbf* aperte questa equivalenza logica continuerebbe a sussistere purché si scelga opportunamente la variabile y, ossia si scelga una variabile che non è libera in A(x) o in B(x).

$$F[\exists xPx \wedge \exists xQx \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)]^*$$

$$V[\exists xPx \wedge \exists xQx)]^*$$

$$F[\exists x(Px \wedge Qx)]$$

$$V[\exists xPx]^*$$

$$V[\exists xQx]^*$$

$$V[Pa]$$

$$V[Qb]$$

$$F[Pa \wedge Qa]^*$$

$$F[Pb \wedge Qb]^*$$

$F[Pa]$ ====	$F[Qa]$

$V[Pb]$	$F[Qb]$ ====

L'albero è rimasto aperto, quindi la proposizione non è valida (e, a maggior ragione, non è valido lo schema $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \rightarrow \exists x(A(x) \wedge B(x))$). Nel dominio $D = \{$a,b$\}$ con l'interpretazione I tale che I(a)=a, I(b)=b, I(P)= a, I(Q) = b sono vere $\exists xPx e \exists xQx$, ma è falsa $\exists x(Px \wedge Qx)$ (nessuno dei due elementi del dominio ha entrambe le proprietà I(P) e I(Q)). $\oplus$

Esempio 6.3.5 Verificare che:

$$\models \forall x(A(x) \rightarrow B) \leftrightarrow (\exists xA(x) \rightarrow B)$$

e

$$\models \exists x(A(x) \rightarrow B) \leftrightarrow (\forall xA(x) \rightarrow B)$$

se x non è libera in B)

Ossia: il quantificatore universale davanti a un condizionale in cui la variabile quantificata compare solo nell'antecedente è logicamente equivalente al condizionale il cui antecedente è quantificato esistenzialmente (e lo stesso accade al quantificatore esistenziale che diviene un quantificatore universale passando nell'antecedente del condizionale).

Si ha, per quanto riguarda la prima, il seguente meta-albero semantico (che si chiude):

- $F[\forall x(A(x) \to B) \leftrightarrow (\exists x A(x) \to B]^*$
  - $V[\forall x(A(x) \to B)]$
  - $F[\exists x A(x) \to B]^*$
  - $V[\exists x A(x)]^*$
  - $F[B]$
  - $V[A(a)]$
  - $V[A(a) \to B]^*$
    - $F[A(a)]$ ====
    - $V[B]$ ====
  - $F[\forall x(A(x) \to B)]^*$
  - $V[\exists x A(x) \to B]^*$
  - $F[A(a) \to B]^*$
  - $V[A(a)]$
  - $F[B]$
    - $F[\exists x A(x)]$
    - $F[A(a)]$ ====
    - $V[B]$ ====

e, per quanto riguarda la seconda, si ha il seguente meta-albero che si chiude:

- $F[\exists x(A(x) \to B) \leftrightarrow (\forall x A(x) \to B]^*$
  - $V[\exists x(A(x) \to B)]^*$
  - $F[\forall x A(x) \to B]^*$
  - $V[A(a) \to B]^*$
  - $V[\forall x A(x)]$
  - $F[B]$
  - $V[A(a)]$
    - $F[A(a)]$ ====
    - $V[B]$ ====
  - $F[\exists x(A(x) \to B)]$
  - $V[\forall x A(x) \to B]^*$
    - $F[\forall A(x)]^*$
    - $F[A(a)]$
    - $F[A(a) \to B]^*$
    - $V[A(a)]$
    - $F[B]$ ====
    - $V[B]$
    - $F[A(a) \to B]^*$
    - $V[A(a)]$
    - $F[B]$ ====

Si osservi che nel ramo più a destra il nodo $F[A(a) \to B]$ si ottiene da $F[\exists x(A(x) \to B]$ introducendo (eventualmente) una costante d'ufficio (in quanto nel ramo non sono evidenziate costanti); invece, nel ramo di centro, il nodo $F[A(a) \to B]$ si ottiene sempre da $F[\exists x(A(x) \to B]$, ma soddisfacendolo con la costante a introdotta per soddisfare il nodo $F[\forall x A(x)]$ (che richiede una regola del IV tipo).

$\oplus$

Esempio 6.3.6 Verificare se $\models (\forall x Px \to \forall x Qx) \to \forall x(Px \to Qx)$

Si ha:

$$\mathrm{F}[(\forall x Px \to \forall x Qx) \to \forall x(Px \to Qx)]^*$$

$$\mathrm{V}[\forall x Px \to \forall x Qx]^*$$

$$\mathrm{F}[\forall x(Px \to Qx)]^*$$

$$\mathrm{F}[Pa \to Qa]^*$$

$$\mathrm{V}[Pa]$$

$$\mathrm{F}[Qa]$$

$$\begin{array}{cc} \mathrm{F}[\forall x Px]^* & \mathrm{V}[\forall x Qx)] \\ | & | \\ \mathrm{F}[Pb] & \mathrm{V}[Qa] \\ & ==== \end{array}$$

L'albero è rimasto aperto (si osservi che, nel ramo a sinistra, per soddisfare F[$\forall x Px$] occorre una nuova costante, e, se si usasse nuovamente a, l'albero si chiuderebbe facendoci concludere in modo erroneo che la proposizione è valida). Nel dominio D = {a,b} con l'interpretazione I(a)=a, I(b)=b, I(P)={a} (infatti nel ramo vi è V[Pa] e F[Pb]), I(Q) = {b} (oppure I(Q)=$\emptyset$, in quanto nel ramo vi è solo F[Qa]), si ha che $\forall x Px$ è falsa, e quindi $\forall x Px \to \forall x Qx$ vera, mentre $\forall x(Px \to Qx)$ è falsa in quanto $Pa \to Qa$ è falsa, essendo Pa vera e Qa falsa. $\oplus$

Riassumiamo schematicamente le proposizioni valide che stabiliscono i rapporti fra i quantificatori e i connettivi logici, invitando lo studente a verificarne la validità con il metodo dell'albero semantico (con B si intende una proposizione qualsiasi).

A) Relazioni tra quantificatori e negazione:

$\models \forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

$\models \exists x A(x) \leftrightarrow \neg\forall x \neg A(x)$

$\models \neg\forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

$\models \neg\exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

B) Relazioni tra quantificatori e congiunzione:

$\models \forall x(A(x) \wedge B) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$

$\models \forall x(B \wedge A(x)) \leftrightarrow B \wedge \forall x A(x)$

$\models \forall x(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

$\models \exists x(A(x) \wedge B) \leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$

$\models \exists x(B \wedge A(x)) \leftrightarrow B \wedge \exists x A(x)$

$\models \exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

C) Relazioni tra quantificatori e disgiunzione:

$\models \forall x(A(x) \vee B) \leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$

$\models \forall x(B \vee A(x)) \leftrightarrow B \vee \forall x A(x)$

$\models \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$

$\models \exists x(A(x) \vee B) \leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$

$$\models \exists x(B \vee A(x)) \leftrightarrow B \vee \exists x A(x)$$

$$\models \exists x(A(x) \vee B(x)) \leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

D) Relazioni tra quantificatori e condizionale:

$$\models \forall x(A(x) \rightarrow B) \leftrightarrow (\exists x A(x) \rightarrow B)$$

$$\models \forall x(B \rightarrow A(x)) \leftrightarrow (B \rightarrow \forall x A(x))$$

$$\models \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x))$$

$$\models \exists x(A(x) \rightarrow B) \leftrightarrow (\forall x A(x) \rightarrow B)$$

$$\models \exists x(B \rightarrow A(x)) \leftrightarrow (B \rightarrow \exists x A(x))$$

$$\models (\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)) \rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$$

Le proposizioni sono quasi tutte sotto forma di bicondizionale; in quelle sotto forma di condizionale non è valido il condizionale inverso. La lista precedente rimane valida anche se negli schemi figurano *fbf* aperte (purché x non sia libera in B). Si ottengono molti bicondizionali validi se si introducono due quantificatori con indice diverso (con l'ipotesi che B(y) sia ottenuta sostituendo y nelle occorrenze libere di x in B(x)); ad esempio:

$$\models \exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \leftrightarrow \exists xy(A(x) \wedge B(y))$$

$$\models \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x \forall y(A(x) \vee B(y))$$

6.4 Quantificazione multipla e alberi che vanno all'infinito

Negli esempi di alberi semantici che abbiamo incontrato nel paragrafo precedente si perveniva alla chiusura o alla terminazione dello sviluppo in un numero finito di passi, cioè non si è ancora verificato quanto avevamo annunciato in sede introduttiva. In questo paragrafo esaminiamo ancora qualche proposizione per studiarne la validità e vedremo qualche esempio di albero il cui sviluppo va avanti all'infinito.

Esempio 6.4.1 Verificare che

$$\models \forall x \forall y Rxy \leftrightarrow \forall y \forall x Rxy$$

$$\models \exists x \exists y Rxy \leftrightarrow \exists y \exists x Rxy$$

Vediamo solo il caso $\forall x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \forall x Rxy$ (lasciando il condizionale inverso e il secondo bicondizionale per esercizio):

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}[\forall x \forall y Rxy \to \forall y \forall x Rxy]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\forall x \forall y Rxy] \\
| \\
\mathrm{F}[\forall y \forall x Rxy]^* \\
| \\
\mathrm{F}[\forall x Rxa]^* \\
| \\
\mathrm{F}[Rba] \\
| \\
\mathrm{V}[\forall y Ray] \\
| \\
\mathrm{V}[\forall y Rby] \\
| \\
\mathrm{V}[Raa] \\
| \\
\mathrm{V}[Rab] \\
| \\
\mathrm{V}[Rba] \\
====
\end{array}
$$

Si possono facilmente verificare anche le seguenti generalizzazioni:

$$\models \forall x \forall y A(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$$

$$\models \exists x \exists y A(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$$

$\oplus$

Esempio 6.4.2 Verificare che: $\models \exists x \forall y Rxy \to \forall y \exists x Rxy$.
Si ha:

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}[\exists x \forall y Rxy \to \forall y \exists x Rxy]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\exists x \forall y Rxy]^* \\
| \\
\mathrm{F}[\forall y \exists x Rxy]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\forall y Ray] \\
| \\
\mathrm{F}[\exists x Rxb] \\
| \\
\mathrm{V}[Raa] \\
| \\
\mathrm{V}[Rab] \\
| \\
\mathrm{F}[Rba] \\
====
\end{array}
$$

Si può verificare più in generale che: $\models \exists x \forall y A(x,y) \rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$

$\oplus$

Esempio 6.4.3 Verificare se $\models \forall x \exists y Rxy \rightarrow \exists y \forall x Rxy$.

In questo esempio indichiamo le costanti, con a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ... L'albero risulta:

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{F}[\forall x \exists y Rxy \rightarrow \exists y \forall x Rxy]^* \\
| \\
\mathrm{V}[\forall x \exists y Rxy](1) \\
| \\
\mathrm{F}[\exists y \forall x Rxy](2) \\
| \\
\mathrm{V}[\exists y Ra_1y]^*(3) \\
| \\
\mathrm{F}[\forall x Rxa_1]^*(4) \\
| \\
\mathrm{V}[Ra_1a_2](5) \\
| \\
\mathrm{F}[Ra_3a_1](6) \\
| \\
\mathrm{V}[\exists y Ra_2y]^*(7) \\
| \\
\mathrm{V}[\exists y Ra_3y]^*(8) \\
| \\
\mathrm{F}[\forall x Rxa_2]^*(9) \\
| \\
\mathrm{F}[\forall x Rxa_3]^*(10) \\
| \\
\mathrm{V}[Ra_2a_4](11) \\
| \\
\mathrm{V}[Ra_3a_5](12) \\
| \\
\mathrm{F}[Ra_6a_2](13) \\
| \\
\mathrm{F}[Ra_7a_3](14) \\
| \\
\mathrm{V}[\exists y Ra_4y]^*(15) \\
| \\
\dots
\end{array}
$$

Spiegazione. I nodi che si ottengono dalla radice, cioè (1) e (2), richiedono entrambi una regola del III tipo. Introduciamo quindi una costante d'ufficio (a_1) e soddisfiamo (1) e (2) (che non vanno contrassegnati) con essa, ottenendo i nodi (3) e (4). Questi ultimi richiedono una regola del IV tipo e quindi li soddisfiamo rispettivamente con le nuove costanti a_2 e a_3, li contrassegnamo e otteniamo i nodi (5) e (6). Dato che abbiamo introdotto due nuovi costanti dobbiamo ritornare ai nodi (1) e (2) e soddisfarli con esse e si ottengono i nodi (7), (8), (9) e (10). Questi richiedono una regola del IV tipo e quindi si soddisfano con quattro nuove costanti a_4, a_5, a_6 e a_7, e si ottengono i nodi (11), (12), (13) e (14). Ma con queste nuove costanti vanno riesaminati i nodi (1) e (2) e il procedimento continua.

In questo caso è del tutto evidente che il meccanismo va avanti all'infinito (l'albero non si potrà mai chiudere). Ne segue che la proposizione non è valida. Il ramo indica anche un caso in cui la proposizione è falsa. Si pone $D = \{a_1, a_2, a_3, a_44, a_5, a_6, \ldots\}$ e $I(\mathrm{R}) = \{(a_1, a_2), (a_2, a_4), (a_3, a_5), \ldots\}$ (ossia le coppie (a_i, a_k) tali che V$[Ra_ia_k]$ è nel ramo). In tal caso l'antecedente è vero, ossia per ogni elemento del dominio ve ne è uno che è con lui nella relazione $I(\mathrm{R})$, mentre il conseguente è falso, ossia non vi è nel dominio alcun elemento tale che tutti gli elementi di D hanno con lui la relazione $I(\mathrm{R})$[6]. Un altro esempio di situazione in cui la proposizione è falsa è il seguente: se $D = \{a, b\}$ e $I(a)$=a, $I(b)$=b, $I(\mathrm{R})$= $\{(a, b), (b, a)\}$ allora l'antecedente è vero (preso un qualsiasi elemento del dominio ve ne è uno con cui è in relazione (infatti a è in relazione con b, e b è in relazione con a), mentre il conseguente è falso poiché non vi è un elemento con cui tutti sono in relazione (se tutti fossero in relazione con a, in $I(\mathrm{R})$ vi dovrebbero essere entrambe le coppie (a, a) e (b, a), mentre se tutti fossero in relazione con b, in $I(\mathrm{R})$ vi dovrebbero essere entrambe le coppie (a, b) e (b, b)). $\oplus$

Il meccanismo che può far scattare lo sviluppo all'infinito si presenta, ad esempio, quando si ha un nodo del tipo:

V$[\forall x \exists y Rxy]$

Infatti, soddisfacendolo con a_1, si trova:

V$[\exists y Ra_1y]$

che, per la regola del IV tipo, si contrassegna e si soddisfa con una nuova costante, ad esempio a_2:

V$[Ra1a2]$.

L'introduzione di a_2 comporta il riesame del nodo iniziale e si ha:

V$[\exists y Ra_2y]$

che, nuovamente, richiede una nuova costante (sia a_3) e si ha:

V$[Ra_2a_3]$.

Si deve allora riesaminare il nodo iniziale e si ha:

V$[\exists y R_a3y]$

si prosegue con:

V$[Ra_3a_4]$

così via all'infinito.

Si ottiene un modello con $D = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ e $I(\mathrm{R})$ = (a1,a2),(a2,a3),(a3,a4),... che rende vera la proposizione $\forall x \exists y Rxy$.

Si può comunque osservare che tale proposizione si soddisfa anche, molto più semplicemente, con $D = \{a\}$ e $I(\mathrm{R}) = \{(a, a)\}$.

Uno sviluppo all'infinito si determina anche se si ha a che fare con un nodo del tipo:

F$[\exists x \forall y Rxy]$

Infatti, se lo si soddisfa con a_1, si ha: F$[\forall y Ra_1y]$, il quale richiede una regola del IV tipo che dà F$[Ra_1a_2]$ con la nuova costante a_2, che comporta il riesame del nodo iniziale e si trova F$[\forall y Ra_2y]$, da cui segue F$[Ra_2a_3]$ e così via.

Esempio 6.4.4 Esempio 4. Ci chiediamo se:

Sod $\{\forall x \neg Rxx, \forall x \exists y Rxy, \forall x \forall y forallz (Rxy \wedge Ryz \to Rxz)\}$.

L'albero che inizia con:

---

[6]Le coppie $(a_1, a_i), (a_2, a_i), (a_3, a_i), \ldots$, il che evidentemente non accade nel nostro esempio. Un altro esempio di situazione in cui la proposizione è falsa è il seguente: Se D = insieme dei numeri naturali e $I(\mathrm{R})$= essere minore, allora è vero l'antecedente per ogni numero naturale ne esiste uno di cui esso è minore (basta prendere il successore del numero), mentre è falso il conseguente esiste un numero y tale che tutti i numeri sono minori di y.

$$\begin{array}{c} \mathrm{V}[\forall x \neg Rxx] \\ | \\ \mathrm{V}[\forall x \exists y Rxy] \\ | \\ \mathrm{V}[\forall x \forall y \forall z (Rxy \land Ryz \to Rxz)] \end{array}$$

va avanti all'infinito (e il secondo nodo è quello che innesta - come si è visto in precedenza - il meccanismo di sviluppo all'infinito), e si deduce che l'insieme è soddisfacibile. Il dominio e l'interpretazione che rendono vere le tre proposizioni risultano: $D = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$ e $I(\mathrm{R}) = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_1, a_4), (a_2, a_4), (a_4, a_5), \ldots\} = \{(a_k, a_h) : a_k < a_h\}$ (e si può identificare D con l'insieme dei numeri naturali e $I(\mathrm{R})$ con la relazione essere minore[7]).

$\oplus$

Osserviamo ora che *non sempre vi sono controesempi con domini finiti.* Ad esempio, *il modello delle tre proposizioni* del precedente Esempio 6.4.4:

$$\forall x \neg Rxx, \forall x \exists y Rxy, \forall x \forall y \forall z (Rxy \land Ryz \to Rxz)$$

ha necessariamente domino infinito. Cerchiamo di capire perché. Nel dominio (che non è mai vuoto) vi deve essere almeno un elemento k_1. Per la prima proposizione k_1 non è in relazione con se stesso. Per la seconda proposizione vi deve essere un individuo con cui k_1 è in relazione e, come si è appena detto, tale individuo, non potendo essere k_1 stesso, deve essere un secondo elemento del dominio, cioè k_2. Anche k_2 non può essere in relazione con se stesso (per la prima proposizione) e deve esserci un individuo con cui è in relazione (per la seconda proposizione). Tale elemento non può essere k_2 (come si è appena detto), ma non può essere nemmeno k_1; infatti, se fosse k_2 in relazione con k_1, poiché k_1 è in relazione con k_2, dalla terza proposizione (proprietà transitiva) seguirebbe che k_2 è in relazione con k_2 (cosa che abbiamo escluso). Quindi k_2 deve essere in relazione con un ulteriore elemento k_3 del dominio. Nuovamente, k_3 deve essere in relazione con un elemento del dominio (per la seconda proposizione) e tale elemento non può essere né k_1, né k_2, né k_3 (altrimenti per la terza proposizione si otterrebbe una contraddizione con la prima), quindi deve essere un quarto elemento k_4, e così via, e si deduce che D contiene infiniti elementi. É proprio l'esistenza di proposizioni che sono soddisfacibili solo su domini infiniti che evidenzia l'indecidibilità del procedimento dell'albero semantico.

6.5 Correttezza e completezza del metodo dell'albero semantico

La correttezza e la completezza del metodo dell'albero semantico per la logica dei predicati si dimostrano con un procedimento molto simile a quello impiegato per il calcolo proposizionale (paragrafo 3.3), per cui ci limitiamo a presentare le modifiche che si rivelano necessarie per estendere le dimostrazioni già viste al presente contesto; utilizziamo inoltre la nomenclatura introdotta in quella sede.

A) Correttezza

La correttezza si basa sul fatto che la soddisfacibilità si trasmette verso il basso: se un ramo è soddisfacibile e lo si prolunga (o si biforca) applicando una delle regole ad uno dei nodi, allora il ramo prolungato (almeno uno dei rami che si ottengono dalla biforcazione) è soddisfacibile. Basta dimostrare che tale proprietà vale quando si applica una qualunque regola di uno dei quattro tipi.

[7] Le tre proposizioni sono vere in tale interpretazione in quanto si traducono in: Nessun numero è minore di se stesso; Per ogni numero ne esiste un altro di cui è minore; Se un numero è minore di un altro e questo è minore di un terzo numero, allora il primo è minore del terzo.

a) Se il prolungamento del ramo soddisfacibile Δ è ottenuto mediante una regola del I tipo (oppure la biforcazione è ottenuta mediante una regola del II tipo) che il ramo prolungato (almeno uno dei due rami ottenuti dopo la biforcazione) sia soddisfacibile si giustifica esattamente come nel calcolo proposizionale. Ci basta allora esaminare il caso in cui in Δ vi è un nodo cui si applica una regola del III o del IV tipo.

b) Consideriamo il caso in cui in Δ vi sia un nodo del tipo V[$\forall x A(x)$][8] Siano D e I il dominio e l'interpretazione su D che soddisfano Δ. Quindi, $I \models \forall x A(x)$. Se al nodo si applica la regola del III tipo, il ramo Δ viene prolungato con dei nodi del tipo V[$A(a)$] per le costanti a che figurano nel ramo. Si è dimostrato (paragrafo 5.3.1) che lo schema $\forall x A(x) \to A(a)$ è valido e, quindi, da $I \models \forall x A(x)$, segue $I \models A(a)$ per ogni a. Allora il ramo prolungato è soddisfacibile rispetto agli stessi D e I.

c) Consideriamo ora il caso in cui in Δ vi sia un nodo del tipo V[$\exists x A(x)$][9]. Vi sono D e I su D che soddisfano Δ. Quindi $I \models \exists x A(x)$. Se al nodo si applica la regola del IV tipo, il ramo Δ viene prolungato con il nodo V[$A(a)$], dove a è una costante che non figura in Δ. Questa volta non si può concludere che $I \models A(a)$, in quanto I può associare ad a un elemento di D per cui $A(a)$ risulta falsa. Dall'ipotesi $I \models \exists x A(x)$, segue, per definizione, che una b-reinterpretazione di I rende vera $A(b)$. Sia k l'elemento di D che tale reinterpretazione associa a b. È allora chiaro che se modifichiamo I in modo che associ ad a l'elemento k, si ottiene una nuova interpretazione I' che coincide con I salvo al più per il fatto che $I'(a) = k$, e tale che $I' \models A(a)$[10]. Inoltre I' soddisfa tutti i nodi di Δ poiché I' coincide con I (la quale per ipotesi soddisfa tutti i nodi di Δ) salvo per il modo di interpretare a e a non compare in alcun nodo di Δ. Quindi il ramo prolungato è soddisfacibile rispetto a D e I'.

A questo punto la correttezza:

$$\boxed{\dim A \Longrightarrow \models A}$$

si dimostra come nel caso proposizionale:
se $\dim A$, cioè se esiste un albero chiuso per F[A], allora $\models A$, cioè A è valida. Infatti, se A non fosse valida, esisterebbero D e I che rendono vera F[A] (e quindi l'albero costituito dal solo nodo F[A] sarebbe soddisfacibile). Ma allora, per quanto sopra dimostrato, in ogni albero per F[A] vi dovrebbe essere un ramo soddisfacibile (poiché la soddisfacibilità si trasmette verso il basso), e ciò contraddice l'ipotesi che esista un albero chiuso (il quale evidentemente non ha alcun ramo soddisfacibile).

(B) Completezza (debole)

Per dimostrare la completezza dobbiamo ampliare le nozioni di ramo e di albero completato.

Definizione 6.5.1 *Un ramo Δ si dice completato se è chiuso oppure se non è chiuso e possiede le seguenti proprietà*[11]*:*

[8] Lasciamo per esercizio l'altro caso di applicazione di una regola del III tipo, cioè quando il nodo è del tipo F[$\exists x A(x)$], che si tratta in modo analogo. Comunque, F[$\exists x A(x)$] equivale a F[$\neg\forall x \neg a(x)$], e quindi a V[$\forall x \neg A(x)$], che è del tipo che stiamo analizzando.

[9] Come nel caso b) precedente, lasciamo per esercizio l'altro caso di applicazione di una regola del IV tipo, cioè quando il nodo è del tipo F[$\forall x A(x)$], che si tratta in modo analogo. Comunque, l'analisi di F[$\forall x A(x)$] si può ricondurre a quella di F[$\neg\exists x \neg A(x)$], e quindi a quella di V[$\exists x \neg A(x)$], che è un nodo del tipo che stiamo analizzando.

[10] La $b-$reinterpretazione di I rende vera $A(b)$, e quindi I' rende vera $A(a)$ in quanto entrambe interpretano la costante coinvolta nell'elemento k e coincidono per tutti gli altri simboli presenti nella proposizione.

[11] Le proprietà indicano semplicemente che ogni nodo che richiede una regola del I, II o IV tipo è stato esaminato e contrassegnato e quelli che richiedono una regola del III tipo sono stati soddisfatti con tutte le costanti presenti nel ramo.

1a)	se $V[\neg A] \in \Delta$,	allora $F[A] \in \Delta$
2a)	se $V[A \wedge B] \in \Delta$,	allora $V[A] \in \Delta$ e $V[B] \in \Delta$
3a)	se $V[A \vee B] \in \Delta$,	allora $V[A] \in \Delta$ o $V[B] \in \Delta$
4a)	se $V[A \to B] \in \Delta$,	allora $F[A] \in \Delta$ o $V[B] \in \Delta$
5a)	se $V[\forall x A(x)] \in \Delta$,	allora per ogni a che compare in Δ, $V[A(a)] \in \Delta$
6a)	se $V[\exists x A(x)] \in \Delta$,	allora, per qualche costante a, $V[A(a)] \in \Delta$
1b)	se $F[\neg A] \in \Delta$,	allora $V[A] \in \Delta$
2b)	se $F[A \wedge B] \in \Delta$,	allora $F[A] \in \Delta$ o $F[B] \in \Delta$
3b)	se $F[A \vee B] \in \Delta$,	allora $F[A] \in \Delta$ e $F[B] \in \Delta$
4b)	se $F[A \to B] \in \Delta$,	allora $V[A] \in \Delta$ e $F[B] \in \Delta$
5b)	se $F[\forall x A(x)] \in \Delta$,	allora per qualche costante a, $F[A(a)] \in \Delta$
6b)	se $F[\exists x A(x)] \in \Delta$,	allora per ogni a che compare in Δ, $F[A(a)] \in \Delta$

Un albero è **completato** se e solo se lo è ogni suo ramo.

Il teorema di completezza si basa sul seguente lemma (di Hintikka):

Ogni ramo completato e non chiuso è soddisfacibile.

Dimostrazione. Consideriamo un qualsiasi ramo Δ completato e non chiuso. Per dimostrare che Δ è soddisfacibile dobbiamo trovare un dominio D e una interpretazione I su D che rende vere tutte le proposizioni segnate di Δ (rende vere le A per cui $V[A]$ e false le A per cui $F[A]$). Come dominio D prendiamo l'insieme delle costanti presenti in Δ. L'interpretazione I è definita (come si è visto negli esempi dei paragrafi precedenti) nel modo seguente: per ogni costante a che compare in Δ, $I(a) = a$ (ogni costante è interpretata in se stessa).

Se R_i^n è un simbolo di predicato si pone: $I(R_i^n) = \{(t_1, ..., t_n) : V[R_i^n t_1 ... t_n] \in \Delta\}$[12]

In base a questa interpretazione I sono soddisfatti tutti i nodi di Δ:

se $A \in \Delta$, allora $I \models A$.

La dimostrazione, come nel caso proposizionale, si ottiene per induzione sulla complessità delle proposizioni segnate che compaiono in Δ.

Base. Se A ha altezza 1, allora A=$V[R_i^n t_1 ... t_n]$ o A=$F[R_i^n t1 ... tn]$.

Se A=$V[R_i^n t_1 ... t_n] \in \Delta$, allora $(t_1, ..., t_n) \in I(R_i^n)$, cioè $(I(t1), ..., I(tn)) \in I(R_i^n)$, da cui $I \models R_i^n t_1 ... t_n$, ossia $I \models V[R_i^n t_1 ... t_n]$.

Se A=$F[R_i^n t_1 ... t_n] \in \Delta$, allora, essendo Δ aperto, $V[R_i^n t_1 ... t_n] \notin \Delta$, per cui $(t_1, ..., t_n) \notin I(R_i^n)$, ossia $(I(t_1), ..., I(t_n)) \notin I(R_i^n)$, e quindi $I \not\models R_i^n t_1 ... t_n$, da cui segue $I \models F[R_i^n t_1 ... t_n]$.

Passo. Se A ha complessità $n+1$, allora è di uno dei tipi che figurano nelle premesse del precedente elenco di proprietà 1a)-6b).

Sia A=$V[B \wedge C] \in \Delta$. Per la proprietà 2a), da $V[B \wedge C] \in \Delta$ segue che $V[B] \in \Delta$ e $V[C] \in \Delta$. Poiché B e C hanno complessità minore di quella di A, per ipotesi induttiva $I \models V[B]$ e $I \models V[C]$, ossia $I \models B$ e $I \models C$, da cui segue $I \models B \wedge C$ e, infine, $I \models V[B \wedge C]$, cioè $I \models A$.

Sia A=$V[B \to C]$. Per la proprietà 4a), da $V[B \to C] \in \Delta$ segue che o $F[B] \in \Delta$ o $V[C] \in \Delta$. Poiché B e C hanno complessità minore di quella di A, per ipotesi induttiva, $I \models F[B] \in \Delta$ o $I \models V[C] \in \Delta$, vale a dire $I \not\models B$ o $I \models C$, da cui si ottiene $I \models B \to C$ e, infine, $I \models V[B \to C]$, cioè $I \models A$.

Sia ad esempio, A=$F[B \wedge C]$. Per la proprietà 2b), da $F[B \wedge C] \in \Delta$ segue che o $F[B] \in \Delta$ o $F[C] \in \Delta$. Come sopra, per ipotesi induttiva, $I \models F[B]$ o $I \models F[C]$, ossia I non rende vera o B o C e, quindi, non è modello di $B \wedge C$ e, infine, $I \models F[B \wedge C]$, cioè $I \models A$.

In modo analogo si trattano facilmente gli altri casi proposizionali (A =$V[\neg B]$, A =$V[B \vee C]$, A =$F[\neg B]$, A =$F[B \vee C]$, A =$F[B \to C]$). Esaminiamo allora i casi più tipicamente predicativi.

Sia A =$V[\forall x A(x)]$. Dalla proprietà 5a), da $V[\forall x A(x)] \in \Delta$ segue che, per ogni costante a che figura nel ramo, $V[A(a)] \in \Delta$, e quindi, per ipotesi induttiva, che $I \models V[A(a)]$. Si deve dimostrare che $I \models V[\forall x A(x)]$, ossia che $I \models \forall x A(x)$. Se, per assurdo, I non fosse modello di $\forall x A(x)$, significa che

[12] Questa definizione sancisce quanto abbiamo visto in molti degli esempi finora svolti (quando un albero non si chiudeva). Se in un ramo aperto vi sono $V[Pa]$, $V[Pc]$, allora $I(\mathrm{P}) = \{ a, c \}$; se vi sono $V[Rab]$, $V[Rac]$, $V[Rbb]$ allora $I(\mathrm{R}) = \{(a,b), (a,c), (b,b)\}$ e così via. Secondo tale definizione risultano false sia le proposizioni atomiche A tali che $F[A]$ è in Δ, sia quelle tali che né $V[A]$, né $F[A]$ stanno in Δ.

una b-reinterpretazione I' di I rende falsa $A(b)$. Tale reinterpretazione associa a b un elemento di D, ossia una costante c che compare in Δ. Ma allora I rende falsa $A(c)$ (in quanto I assegna ad $A(c)$ lo stesso valore che la reinterpretazione I' associa a $A(b)$, in quanto $I(c) = I'(b) = c$ e sulle altre costanti I e I' coincidono). Ma ciò è assurdo, poiché, come si è detto, $I \models A(a)$, per ogni a che compare in Δ, e quindi $I \models A(c)$.
Sia $A =$V[$\exists x A(x)$]. Per la proprietà 6a), da V[$\exists x A(x)$]$\in \Delta$ segue che V[$A(a)$]$\in \Delta$ per una costante a, e quindi, per ipotesi induttiva, che $I \models A(a)$. Ma se $I \models A(a)$, allora, per la validità dello schema $A(a) \to \exists x A(x)$, ne segue $I \models \exists x A(x)$, vale a dire $I \models$V[$\exists x A(x)$], cioè $I \models A$.
I casi F[$\forall x A(x)$] e F[$\exists x A(x)$] si trattano in modo analogo ai due precedenti (e ad essi si possono ricondurre ricordando che $\forall x A(x)$ è logicamente equivalente a $\neg\exists x \neg A(x)$, e quindi F[$\forall x A(x)$] equivale a V[$\exists x \neg A(x)$], e analogamente $\exists x A(x)$ è logicamente equivalente a $\neg \forall x \neg A(x)$, e quindi F[$\exists x A(x)$] equivale a V[$\forall x \neg A(x)$]) e li lasciamo per esercizio. $\oplus$

Per dimostrare la completezza del metodo dell'albero semantico bisogna dimostrare che si può sviluppare l'albero in modo che ogni ramo sia completato. In tal caso, se l'albero non si chiude, vi è almeno un ramo aperto che è completato e quindi soddisfacibile per il teorema precedente. Nel caso della logica proposizionale non vi erano particolari problemi in quanto il procedimento di costruzione terminava sempre o con la chiusura, o quando ogni nodo non contenente una fp atomica era stato contrassegnato (e quindi i rami completati). Nel caso della logica dei predicati, invece, occorre una maggiore precauzione. Infatti, se si incontra un nodo del tipo V[$\forall x \exists y Rxy$], come si è visto, esso innesca un meccanismo che può portare ad uno sviluppo infinito trascurando gli altri nodi. Così potrebbe succedere che si continui il ciclo e quindi si vada all'infinito senza che si esamini, ad esempio, l'altro nodo V[$\exists x \forall y \neg Rxy$] che, invece, farebbe chiudere il ramo. In altri termini, occorre che tutti i nodi siano esaminati e, dato che vi sono quelli che non si contrassegnano, occorre che questi siano sistematicamente riesaminati. Solo con una procedura sistematica si può garantire che un ramo che rimane aperto sia completato.

Un modo sistematico per procedere è, ad esempio, il seguente.

Quando si applica una regola a un nodo del III tipo, si contrassegna (contrariamente a quanto si è fatto finora) *il nodo, ma lo si ripete in fondo ad ogni ramo che rimane aperto. Ad ogni passo, in ogni ramo si esamina il nodo non ancora contrassegnato più vicino alla radice.*

Quindi, i nodi del tipo V[$\forall x A(x)$] e F[$\exists x A(x)$], quando si incontrano discendendo dalla radice, si soddisfano con le costanti presenti, si contrassegnano e si ricopiano in fondo ai rami per essere riesaminati dopo che sono stati esaminati gli altri, per poi eventualmente essere riesaminati con le stesse modalità. Chiamiamo *sistematica* questa nuova procedura di costruzione dell'albero. Adottando una procedura sistematica siamo sicuri (e lo si potrebbe dimostrare rigorosamente) che ogni ramo sia completato.

Si ottiene allora facilmente il

Teorema 6.5.1 (Teorema di completezza (debole)) $\boxed{\models A \Longrightarrow \dim A}$

Infatti, se A è valida, costruiamo un albero per F[A] adottando una procedura sistematica. Vogliamo dimostrare che tale albero si chiude (e quindi che dim A). Se tale albero non si chiudesse, allora vi sarebbe almeno un ramo aperto. Tale ramo sarebbe completato (e ne siamo sicuri poiché abbiamo adottato la procedura sistematica). Ma un ramo aperto completato è soddisfacibile. Vi sarebbero quindi D e I che soddisfano ogni nodo del ramo, in particolare F[A] (che, essendo la radice, fa parte di ogni ramo). Ma ciò è assurdo poiché, per ipotesi, A è valida e quindi nessuna interpretazione può rendere falsa A (cioè vera F[A]).

Una conseguenza della discussione fin qui svolta è la seguente. Se la proposizione A è soddisfacibile, allora l'albero costruito con procedura sistematica per V[A] non può chiudersi. Vi è quindi nell'albero un ramo aperto che è completato. Tale ramo (e in particolare la radice V[A], e quindi anche A) è soddisfacibile in un dominio costituito con le costanti che compaiono nel ramo. Tale dominio è finito o numerabile. Vale quindi il:

Teorema 6.5.2 (Teorema (debole) di Löwenheim-Skolem) *Se una proposizione A è soddisfacibile, allora A è soddisfacibile in un dominio finito o numerabile.*

Osservazione. Osserviamo che il teorema precedente si può specificare nel modo seguente:

Se una proposizione A è soddisfacibile, allora A è soddisfacibile in un dominio numerabile.

Possiamo infatti modificare il metodo dell'albero semantico imponendo di soddisfare i nodi del III tipo via via con tutte le costanti (e non solo, come si è fatto, con quelle presenti nel ramo). Ciò ha la conseguenza che, in presenza di nodi del III tipo, tutti i rami aperti vanno all'infinito. Con questa modifica, come dominio D corrispondente ad un ramo aperto si può prendere sempre l'insieme (numerabile) di tutte le costanti. Siccome si può identificare l'insieme delle costanti con l'insieme N dei numeri naturali, si può formulare il teorema di Löwenheim-Skolem nel modo seguente:

Se una proposizione A è soddisfacibile, allora A è soddisfacibile in N. $\oplus$

Quanto finora ottenuto si estende immediatamente alla conseguenza logica, alla soddisfacibilità e alla derivabilità quando si considerano insiemi finiti.

Vale infatti, come si è visto nel paragrafo 3.3, che:

$\{A1, A2, ..., Am\} \models B \Longleftrightarrow \models A1 \wedge A2 \wedge ... \wedge Am \rightarrow B \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ dim $A1 \wedge A2 \wedge ... \wedge Am \rightarrow B \Longleftrightarrow \{A1, A2, ..., Am\}$dim B

Sod $\{A1, A2, ..., Am\}$ Sod $A1 \wedge A2 \wedge ... \wedge Am$

e, quindi, la conseguenza logica da un insieme finito, la derivabilità da un insieme finito di proposizioni, la soddisfacibilità di un insieme finito si riconducono alla validità, alla derivabilità e alla soddisfacibilità di una singola proposizione.

(C) Compattezza e completezza (forte)

Come si è visto nel Capitolo 3, si possono proporre due formulazioni equivalenti del **Teorema di compattezza (semantica)**:

Se $X \models A$, *allora esiste un sottoinsieme finito F di X tale che $F \models A$.*

Se ogni sottoinsieme finito di X è soddisfacibile, allora X è soddisfacibile.

Per dimostrare il teorema di compattezza per la logica dei predicati possiamo seguire lo stesso procedimento adottato nella logica proposizionale, procedendo però con alcuni accorgimenti che si rivelano necessari poiché siamo in presenza di insiemi infiniti di proposizioni.
Vediamo subito, attraverso un esempio, un problema che si può presentare.
Chiediamoci se è soddisfacibile il seguente insieme infinito di proposizioni:

$\{\exists xPx, \neg Pa_1, \neg Pa_2, \neg Pa_3, \ldots, \neg Pa_m, \ldots\}$

Lo studente non si lasci trarre in inganno. L'insieme in questione è evidentemente soddisfacibile: basta considerare un dominio D di due elementi, ad esempio, $D = \{1,2\}$ e porre $I(P)=\{1\}$ e $I(a_1)=I(a_2)= \ldots =I(a_m)= \ldots = 2$. In questo caso $I \models \exists xPx$ poiché 1 ha $I(P)$, e $I \models \neg Pa_m$, per ogni m, poiché I Pa_m, dato che $I(a_m) = 2 \notin I(P)$. Se impieghiamo il metodo dell'albero semantico come lo abbiamo finora impostato sorge un problema. Se iniziamo con V$[\exists xPx]$, dobbiamo soddisfare il nodo con una costante ponendo ad esempio V$[Pa_i]$; ma allora quando inseriamo il nodo V$[\neg Pa_i]$, ne segue F$[Pa_i]$ e l'albero (che è costituito da un unico ramo) si chiude (e quindi dovremmo concludere che l'insieme è insoddisfacibile). L'errore è evidente: quando soddisfiamo un nodo del IV tipo occorre introdurre una costante nuova nel ramo; ma in questo caso, anche se all'inizio non abbiamo costanti, quando introduciamo le altre proposizioni, veniamo a introdurre tutte le costanti a disposizione per cui nessuna costante è in effetti veramente nuova, poiché tutte prima o poi verranno introdotte.

Per superare questo inconveniente basta distinguere le costanti con cui costruiamo le proposizioni da quelle che impieghiamo per soddisfare i nodi del IV tipo. Potremmo convenire di adoperare nelle proposizioni solo le costanti di indice pari e di adoperare quelle di indice dispari per soddisfare i nodi di IV tipo. Oppure si può introdurre un'altra successione[13] di costanti $c_1, c_2, c_3, \ldots$ con cui soddisfare i nodi del IV tipo. La regola del IV tipo viene allora modificata nel senso che il nodo viene soddisfatto con la prima delle nuove costanti che non figura nel ramo.

[13]Introduciamo un'infinità numerabile di costanti nuove, sia perché in un insieme infinito possono esservi infinite proposizioni che richiedono una regola del IV tipo, sia perché possono esservi proposizioni (del tipo di V$[\forall x \exists y Rxy]$) che si riesaminano periodicamente e hanno come conseguenza una proposizione che richiede una regola del IV tipo.

Ciò premesso, per dimostrare il teorema di compattezza, possiamo procedere come nel caso proposizionale con un'unica differenza che ora illustriamo.

Sia X $=\{A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots\}$ un insieme infinito di proposizioni tale che, per ipotesi, ogni sottoinsieme finito è soddisfacibile. Si vuole dimostrare che X è soddisfacibile. Sviluppiamo con procedura sistematica (e con le regole del IV tipo modificate come appena detto) un albero semantico partendo con V[A_1] e inserendo, dopo ogni passo, in ogni ramo aperto, V[A_2], V[A_3], e così via[14]. Tale albero non può chiudersi in quanto, se si chiudesse, avremmo inserito solo un numero finito di proposizioni di X e il chiudersi dell'albero comporterebbe che tale sottoinsieme non è soddisfacibile, contro l'ipotesi che ogni sottoinsieme finito è soddisfacibile. Dato che l'albero non si chiude, almeno un ramo va avanti all'infinito, contiene tutte le V[A_m] (per ogni m) ed è completato (poiché si adotta la procedura sistematica). Tale ramo è allora soddisfacibile (dato che ogni ramo completato è soddisfacibile) e, quindi, X è soddisfacibile.

Una volta dimostrato il teorema di compattezza si ottiene, come nel caso proposizionale, il:

Teorema 6.5.3 (Teorema di completezza (forte)) $\boxed{\textit{Se } X \models A, \textit{ allora } X \operatorname{dim} A}$

(Il teorema di correttezza forte si dimostra come si è visto nel caso proposizionale).
Poiché il modello costruito nella precedente dimostrazione del teorema di compattezza è al più numerabile (è costituito da costanti vecchie e nuove) ne segue il:

Teorema 6.5.4 (Teorema (forte) di Löwenheim-Skolem) *Se un insieme X è soddisfacibile, allora X è soddisfacibile in un dominio finito o numerabile.*

e, per l'Osservazione precedente, si può sopprimere l'alternativa che il dominio sia finito:

Teorema 6.5.5 (Teorema (forte) di Löwenheim-Skolem) *Se un insieme X è soddisfacibile, allora X è soddisfacibile in un dominio numerabile.*

[14] Nel caso proposizionale si può procedere in un altro modo. Si sviluppa l'albero di V[A_1]] fino alla sua terminazione, poi si introduce V[A_2], nei rami aperti e si sviluppa fino alla terminazione, si inserisce V[A_3] e così via. In altre parole, si può terminare il lavoro prima di introdurre la nuova proposizione V[A_i] dell'insieme. Nel caso predicativo, invece, l'albero di una singola proposizione può andare all'infinito per cui bisogna inserire le proposizioni V[A_i] periodicamente e procedere in modo sistematico.